1.2. Πληθάριθμοι

Ορισμός 1.1 Δύο μη κενά σύνολα A, B λέγονται ισοπληθικά αν υπάρχει μια συνάρτηση $f: A \to B$ η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί). Τότε γράφουμε $|A| = |B|$ ή $A \sim B$.

Πρόταση 1.2 Έστω A, B, Γ τρία μη κενά σύνολα.

(α) $A \sim A$

(β) αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$.

(γ) αν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$, τότε $A \sim \Gamma$.

Απόδειξη

(α) Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $id_A : A \to A$ με $id_A(x) = x \ \forall x \in A$. Προφανώς η id_A είναι 1-1 και επί ($id_A(x_1) = id_A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ και $x = id_A(x) \ \forall x \in A$)

(β) Αν $A \sim B$ υπάρχει $f: A \to B$ που είναι 1-1 και επί. Άρα υπάρχει η $f^{-1}: B \to A$ που είναι επίσης συνάρτηση 1-1 και επί. Επομένως $B \sim A$.

(γ) Έστω $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$ που είναι 1-1 και επί.
Τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to \Gamma$ είναι συνάρτηση 1-1 και επί, και επομένως $A \sim \Gamma$.

Παραδείγματα 1.3

(1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \sim \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ με $f(n) = n - 1$ είναι 1-1 και επί ($n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$, $n = f(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, $n+1 \in \mathbb{N}$)

(2) $\mathbb{N} \sim \{2n : n \in \mathbb{N}\}$
Η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ με $f(n) = 2n$ είναι 1-1 και επί ($2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$, $2n = f(n)$ για $n \in \mathbb{N}$)

(3) $\mathbb{N} \sim -\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} : a < 0\} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

Η $f : \mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ με $f(n) = -n$ είναι 1-1 και επί

($-n_1 = -n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$ και $-n = f(n)\ \forall -n \in -\mathbb{N}$

(4) $\mathbb{N} \sim \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$

Η $f : \mathbb{N} \to \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ με $f(n) = n^2$ είναι 1-1 και επί

($n_1^2 = n_2^2 \Rightarrow n_1 = n_2$ και $n^2 = f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$)

(5) Τα ανοικτά διαστήματα $(0,1)$, $(0,b)$ του $\mathbb{R}$ είναι ισοδύναμα: $(0,1) \sim (0,b)$. $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Η $f : (0,1) \to (0,b)$ με $f(x) = bx$ είναι 1-1 και επί

(5a) Γενικότερα: $(0,1) \sim (a,b)$ για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

Η $f : (0,1) \to (a,b)$ με $f(t) = (1-t)a + tb\ \forall t \in (0,1)$ είναι 1-1 και επί (αμφιμονοσήμαντη) για $a < b$

Πράγματι, $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow (1-t_1)a + t_1 b = (1-t_2)a + t_2 b$

$\Leftrightarrow (t_2 - t_1)a = (t_2 - t_1)b \Leftrightarrow (t_2 - t_1)(a - b) = 0$

$\Leftrightarrow t_1 = t_2$ (διότι $a - b > 0$ και άρα $a \neq b$.

(5b) Άρα $(a,b) \sim (\gamma, \delta)\ \forall a < b$ και $\gamma < \delta$ λόγω της μεταβατικής ιδιότητας (1.2 (γ))

[$(a,b) \sim (0,1)$ και $(0,1) \sim (\gamma,\delta) \Rightarrow (a,b) \sim (\gamma,\delta)$]

(6) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών)

Η συνάρτηση $\varepsilon\varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \to \varepsilon\varphi x$ είναι 1-1 και επί.

(6a) Αφού $(a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (από (5b)) και $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ (από (6)), έχουμε ότι: $\mathbb{R} \sim (a,b)$ για κάθε διάστημα (a,b).

(7) $(0,+\infty) \sim \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $f(x) = e^x$ είναι 1-1 και επί, άρα $\mathbb{R} \sim (0,+\infty)$.

(7a) Επίσης $(0,+\infty) \sim (a,+\infty)\ \forall a \in \mathbb{R}$, διότι η συνάρτηση $g : (0,+\infty) \to (a+\infty)$ με $g(x) = x + a$ είναι προφανώς 1-1 και επί

(7b) Άρα $\mathbb{R} \sim (a,+\infty)\ \forall a \in \mathbb{R}$.

(8) Επίσης $(0,+\infty) \sim (-\infty, 0)$, διότι η συνάρτηση
$$f:(0,+\infty) \to (-\infty,0) \text{ με } f(x) = -x$$
είναι 1-1 και επί.

(9) $(-\infty, 0) \sim (-\infty, \alpha)$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, διότι η συνάρτηση $h:(-\infty,0) \to (-\infty,\alpha)$ με $h(x) = x+\alpha$ είναι 1-1 και επί.

Επομένως ισχύουν:
$\mathbb{R} \sim (\alpha, \beta) \sim (\gamma, +\infty) \sim (-\infty, \delta)$
για καθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(10) $(0,1) \sim (0,1]$

Έστω η συνάρτηση $f:(0,1] \to (0,1)$ με
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{αν } x = \frac{1}{n} \text{ για } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

(α) Η f είναι 1-1 και επί. Πράγματι:
Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ για $x_1, x_2 \in (0,1]$.
(i) Αν $x_1 \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, τότε
$f(x_2) = f(x_1) = x_1 \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Άρα, $x_2 \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ και συνεπώς $\boxed{x_2 = f(x_2) = x_1}$
(ii) $x_1 = \frac{1}{n}$, τότε:
$f(x_2) = f(x_1) = \frac{1}{n+1}$, άρα $x_2 = \frac{1}{n} = x_1$.
Άρα, η f είναι 1-1.

(β) Η f είναι επί, διότι για $y \in (0,1)$ έχουμε:
ότι $y = f(y)$ αν $y \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
και $y = f\left(\frac{1}{n-1}\right)$ αν $y \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Άρα $(0,1) \sim (0,1]$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι:
$$(\alpha, \beta) \sim (\alpha, \beta] \sim [\alpha, \beta] \sim [\alpha, \beta) \quad \forall\, \alpha < \beta.$$
Άρα όλα τα διαστήματα είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.4 Έστω δύο σύνολα A, B.
Γράφουμε $A \preceq B$ και λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο (μικρότερο ή ίσο) με το B αν υπάρχει συνάρτηση $f: A \to B$ που είναι 1-1.

Πρόταση 1.5
Έστω $\emptyset \neq A, B$ δύο σύνολα. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(i) $A \preceq B$ (Υπάρχει $f: A \to B$ 1-1).
(ii) Υπάρχει συνάρτηση $g: B \to A$ που είναι επί.
(iii) Υπάρχει $\Gamma \subseteq B$ ώστε $A \sim \Gamma$.

Απόδειξη
(i) $\Rightarrow$ (ii) Αν $A \preceq B$, τότε υπάρχει $f: A \to B$ 1-1.
Άρα, αν $y \in f(A) \subseteq B$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ ώστε $y = f(x)$, ορίζουμε λοιπόν $g(y) = x$. Έστω $x_0 \in A$.
Αν $y \in B \setminus f(A)$ ορίζουμε $g(y) = x_0$.
Η συνάρτηση $g: B \to A$ είναι επί, διότι $\forall x \in A$, έχουμε ότι $x = g(f(x))$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Αν $g: B \to A$ είναι συνάρτηση επί του A, ορίζουμε $f: A \to B$ που είναι 1-1 ως ακολούθως.
Έστω $x \in A$. Τότε $g^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$. Έστω ένα $y_x \in g^{-1}(\{x\})$.
Θέτουμε $f(x) = y_x$. Άρα, $g(f(x)) = g(y_x) = x \ \forall x \in A$.
Η f είναι 1-1, διότι αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
Άρα, $A \preceq B$.
(i) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $A \preceq B$, δηλαδή υπάρχει $f: A \to B$ που είναι 1-1. Θέτουμε $\Gamma = f(A) \subseteq B$.
Τότε $f: A \to \Gamma$ είναι 1-1 και επί και άρα $A \sim \Gamma$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $A \sim \Gamma$, όπου $\Gamma \subseteq B$, και $f: A \to \Gamma$ 1-1 και επί. Επίσης έστω $h: \Gamma \to B$ με $h(x) = x \ \forall x \in \Gamma$.
Η συνάρτηση $h \circ f: A \to B$ είναι 1-1, διότι οι f, h είναι 1-1.

Παρατηρήσεις

① Ισχύει $A \preccurlyeq A$ για κάθε σύνολο A.
Πράγματι: η ταυτοτική συνάρτηση $f: A \to A$ με $f(x) = x \ \forall x \in A$ είναι 1-1. (ανακλαστική ισχύει)

② Αν $A \preccurlyeq B$ και $B \preccurlyeq A$, τότε **δεν** είναι σωστό ότι $A = B$.
Πράγματι: έστω $\boxed{A = \mathbb{N}}$ και $\boxed{B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}}$. Τότε $A \preccurlyeq B$, διότι η συνάρτηση $f: A \to B$ με $f(n) = 2n$ είναι 1-1. Επίσης $B \preccurlyeq A$, διότι η συνάρτηση $g: B \to A$ με $g(2n) = n$ είναι 1-1 $(n_1 = n_2 \Rightarrow 2n_1 = 2n_2)$. Όμως $A \neq B$ $(3 \in A, 3 \notin B)$.
Παρατηρούμε όμως ότι είναι σωστό ότι $A \sim B$.

③ Αν $A \preccurlyeq B$ και $B \preccurlyeq \Gamma$, ισχύει ότι $A \preccurlyeq \Gamma$.
Πράγματι, αν υπάρχει συνάρτηση $f: A \to B$ 1-1 και υπάρχει συνάρτηση $g: B \to \Gamma$ που είναι 1-1, τότε η συνάρτηση $g \circ f: A \to \Gamma$ είναι 1-1 (διότι αν $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (αφού g είναι 1-1) $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ (αφού η f είναι 1-1).

Θεώρημα 1.6. (Schröder–Bernstein)
Αν $X \preccurlyeq Y$ και $Y \preccurlyeq X$, τότε $X \sim Y$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $X \preccurlyeq Y$ και $Y \preccurlyeq X$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f: X \to Y$ και $g: Y \to X$ που είναι 1-1. Έστω $g \circ f: X \to X$ η οποία είναι 1-1 επίσης, ως σύνθεση 1-1 συναρτήσεων.
Επομένως η συνάρτηση

$$g \circ f : X \to g(f(X)) = g \circ f(X)$$

είναι 1-1 και επί του $g(f(X))$.
Επομένως, $X \sim g(f(X))$ και $Y \sim g(Y)$.

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$X \sim g(f(X))$$

όπου

$$g(f(X)) \subseteq g(Y) \subseteq X,$$

Απο το επόμενο Λημμα: $g(Y) \sim X$. Επίσης $Y \sim g(Y)$, άρα $Y \sim X \Leftrightarrow X \sim Y$.

<u>Λήμμα 1.7</u>

Αν A_1, B, A είναι σύνολα ώστε:

$$A_1 \subseteq B \subseteq A \quad \text{και} \quad A_1 \sim A$$

τότε $B \sim A$ και άρα $B \sim A_1$.

<u>Απόδειξη</u> Αφού $A_1 \sim A$, υπάρχει $\boxed{h: A \to A_1}$ που είναι 1-1 και επί.

Θέτουμε $A_0 = A$, $B_0 = B$ και

$$\boxed{A_{n+1} = h(A_n)}, \quad \boxed{B_{n+1} = h(B_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Προφανώς, $A_n \sim A_0 = A$ και $B_n \sim B_0 = B$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Επίσης, $\boxed{A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Επαγωγική απόδειξη:

$n=0$ $\quad A_0 = A \supseteq B = B_0 \supseteq A_1$ ισχύει.

Έστω οτι ισχύει $A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1}$.

Τότε ισχύει:

$$A_{n+1} = h(A_n) \supseteq h(B_n) = B_{n+1} \supseteq A_{n+2} = h(A_{n+1}),$$

αφού $A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1} \Longrightarrow h(A_n) \supseteq h(B_n) \supseteq h(A_{n+1})$

Άρα, ισχύει $A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ (επαγωγή)

Θέτουμε

$$C_n = A_n \setminus B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

και

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (A_n \setminus B_n)$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$A \setminus C = B \setminus C.$$

[$x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in A$ και $x \notin C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} C_n \Leftrightarrow x \in A$ και $x \notin C_0 = A \setminus B$ και $x \notin C$ $\Leftrightarrow x \in B$ και $x \notin C$.]

<u>Ισχυρισμός:</u> Ισχύει $h(C_n)=C_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού</u>

Ισχύει $h(C_n)\subseteq C_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Πράγματι, αν $y=h(x)\in h(C_n)$ για $x\in \boxed{C_n=A_n\setminus B_n}$,
τότε $y\in h(A_n)$, διότι $x\in A_n\subseteq A_n$
και άρα $y\in A_{n+1}=h(A_n)$.
Επίσης, αφού $x\notin B_n$ και η συνάρτηση
$h:A\to A_1$ είναι 1-1, έχουμε ότι:

$$y=h(x)\notin h(B_n)=B_{n+1}.$$

Επομένως $y\in A_{n+1}\setminus B_{n+1}=C_{n+1}$.

Ισχύει $C_{n+1}\subseteq h(C_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$

Πράγματι, αν $y\in C_{n+1}=A_{n+1}\setminus B_{n+1}$,
τότε $y\in A_{n+1}=h(A_n)$, άρα $y=h(x)$ για $x\in A_n$.
Αφού $y=h(x)\in A_{n+1}\setminus B_{n+1}$,
έχουμε ότι $x\notin B_n$, διότι αν $x\in B_n$
θα είχαμε ότι $y=h(x)\in B_{n+1}$, άτοπο.
Επομένως, $y=h(x)$ όπου $x\in A_n\setminus B_n=C_n$
και άρα $y\in h(C_n)$

Από τον Ισχυρισμό έχουμε ότι ο περιορισμός
της συνάρτησης $h:A\to A_1$ στο $C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}C_n$

$$h|_C: C\longrightarrow h(C)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$$

είναι 1-1 (αφού η h είναι 1-1) και
είναι επί του $h(C)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n=C\cap B$

Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$g: A=C\cup(A\setminus C)\longrightarrow B=(B\cap C)\cup(B\setminus C)$$

ώστε:

$$g(x)=h(x) \quad \text{αν } x\in C \text{ και}$$
$$g(x)=x \quad \text{αν } x\in A\setminus C$$

Η g είναι 1-1, διότι η h και η ταυτοτική
συνάρτηση είναι 1-1, και είναι επί του B.

$$[(C\cap B)\cup(A\setminus C)=(C\cap B)\cup(B\setminus C)=B]$$

Αριθμήσιμα σύνολα

Έστω $T_n = \{1, 2, \dots, n\}$ το σύνολο των πρώτων n φυσικών αριθμών. ($T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{1, 2\}$, ...)

Ορισμός 1

Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο αν:

$A = \emptyset$ ή $A \sim T_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Μάλιστα, αν $A = \emptyset$, λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο ίσο με το 0, και αν $A \sim T_n$ για $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο n (ή έχει n στοιχεία) και γράφουμε

$\operatorname{card} A = n$ ή και $|A| = n$ για $n \in \mathbb{N}_0$.

Ορισμός 2

Ένα σύνολο A λέγεται άπειρο, αν δεν είναι πεπερασμένο.

Ορισμός 3

Ένα σύνολο A λέγεται άπειρο αριθμήσιμο αν είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$ ($A \sim \mathbb{N}$). Τότε λέμε ότι ο πληθάριθμος του A είναι ίσος με τον πληθάριθμο του $\mathbb{N}$ και γράφουμε

$\operatorname{card} A = \operatorname{card} \mathbb{N} = \omega$ ή $\aleph_0$ ή

$|A| = |\mathbb{N}| = \omega$ $(|A| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|)$

Ορισμός 4

Ένα σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο αν είναι είτε πεπερασμένο, είτε άπειρο αριθμήσιμο.

Παραδείγματα:
Όπως αναφέραμε προηγουμένως (Παραδείγματα 1.3) τα σύνολα $\mathbb{N}_0, \mathbb{N}, \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $-\mathbb{N}$, $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, είναι άπειρα αριθμήσιμα.

Λήμμα 2.2
Κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. Μάλιστα αν A είναι άπειρο σύνολο, τότε είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$.

Απόδειξη
Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Τότε:
(i) Αν $A=\emptyset$, τότε είναι πεπερασμένο, άρα αριθμήσιμο.
(ii) Αν $A \neq \emptyset$, τότε από την αρχή ελαχίστου, έχει ελάχιστο στοιχείο $a_1 \in A$.
Αν $A \setminus \{a_1\} = \emptyset$, τότε $A = \{a_1\} \sim \{1\} = T_1$, άρα είναι πεπερασμένο, οπότε αριθμήσιμο
Αν $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, τότε, από την αρχή ελαχίστου, έχει ελάχιστο στοιχείο $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ με $a_1 < a_2$.
Αν $A \setminus \{a_1, a_2\} = \emptyset$, τότε $A = \{a_1, a_2\} \sim \{1,2\} = T_2$ άρα είναι πεπερασμένο, οπότε αριθμήσιμο.
Αν $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, τότε, από την αρχή ελαχίστου έχει ελάχιστο στοιχείο $a_3 > a_2 > a_1$.
Αν $A \setminus \{a_1, a_2, a_3\} = \emptyset$, τότε $A \sim \{1,2,3\} = T_3$ είναι πεπερασμένο, οποτε αριθμήσιμο, και συνεχίζουμε ανάλογα επαγωγικά:
Αν υπάρξει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$, τότε $A = \{a_1, \dots, a_n\} \sim \{1, \dots, n\} = T_n$, άρα το A είναι πεπερασμένο, οπότε αριθμήσιμο
Αν δεν υπάρξει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$ δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ με $a_1 < a_2 < \dots < a_n \dots$, τότε ορίζεται μια συνάρτηση (ακολουθία) γνήσια αύξουσα

[illegible]

$a : \mathbb{N} \to A$ με $a(n) = a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

που είναι $\boxed{1-1}$ και $\boxed{\text{επί}}$.

Πράγματι, η συνάρτηση a είναι 1-1, διότι για $n > m$ έχουμε $a_n > a_m \Rightarrow a_n \neq a_m$.

Η συνάρτηση a είναι επί του A, διότι αν $\boxed{x \in A}$, τότε $\boxed{x \in \mathbb{N}}$, αφού $A \subseteq \mathbb{N}$, και $\boxed{x \leq a_x < a_{x+1}}$ (αφού $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$)

άρα υπάρχει $n = x+1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\boxed{a_n > x}$, επομένως

$$\boxed{\emptyset \neq A_x = \{n \in \mathbb{N} : a_n > x\} \subseteq \mathbb{N}}$$

Από την αρχή ελαχίστου το A_x έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω $m \in A_x$. Τότε

$$\underbrace{\boxed{x < a_m}}_{m \in A_x} < \underbrace{a_n}_{a_n > x} \Rightarrow \forall n \in A_x \text{ με } n \neq m.$$

Επομένως,

$$\boxed{a_{m-1} \leq x}, \quad m$$

διότι $m-1 < m$ και m ελάχιστο στοιχείο του A_x.

Αν $a_{m-1} < x$, τότε $\boxed{a_{m-1} < x < a_m}$

$x, a_m \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}$ με $\boxed{x < a_m}$.

Άρα, $a_m \neq \min(A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}) \leq x$

Άτοπο! διότι $x < a_m$.

Άρα, $a_{m-1} = x$, οπότε $x \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A$.

που είναι το ζητούμενο. Άρα η a είναι επί.

Επομένως, $a : \mathbb{N} \to A$ είναι 1-1 και επί.

Παρατήρηση
Κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ είτε είναι πεπερασμένο είτε είναι άπειρο αριθμήσιμο, δηλαδή $A \sim \mathbb{N}$. (Λημμα 2.2)

Επομένως
$$A \text{ αριθμήσιμο} \Leftrightarrow A \preceq \mathbb{N}.$$

($\Rightarrow$) Αν το A είναι αριθμήσιμο, τότε είτε είναι πεπερασμένο, είτε άπειρο αριθμήσιμο, δηλαδή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. Οπότε είτε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A \sim T_m$ είτε $A \sim \mathbb{N}$. Οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.5 (i)$\Leftrightarrow$(iii) έχουμε $A \preceq \mathbb{N}$ (υπάρχει $f: A \to \mathbb{N}$ που είναι 1-1).

($\Leftarrow$) Αν $A \preceq \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $A \sim \Gamma$ (Προταση 1.5). Απο την προηγούμενη παρατήρηση είτε $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο είτε Γ άπειρο αριθμήσιμο, δηλαδή Γ αριθμήσιμο. Οπότε A αριθμήσιμό σύνολο.

Πρόταση Έστω A ένα σύνολο. Τα ακόλουθα ισοδύναμα: (i) Το A είναι αριθμήσιμο.
(ii) Υπάρχει $f: A \to \mathbb{N}$ 1-1 συνάρτηση.
(iii) Υπάρχει $g: \mathbb{N} \to A$ επί συνάρτηση.

Απόδειξη
(i) A αριθμήσιμο $\Leftrightarrow A \preceq \mathbb{N} \Leftrightarrow$ (ii)
Έχουμε (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) σύμφωνα με την Πρόταση 1.5
Πράγματι, αν ισχύει το (ii) τότε $A \preceq \mathbb{N}$ και άρα υπαρχει $g: \mathbb{N} \to A$ επί, από την Πρόταση 1.5 ((i)$\Leftrightarrow$(ii))

Παραδείγματα

(α) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι ~~άπειρο~~ αριθμήσιμο ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$)
(Η $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με $f((m,n))=2^{m-1}(2n-1)$ είναι 1-1 και επί.)

Απόδειξη

Η f είναι 1-1 διότι αν:
$$2^{m_1-1}\cdot(2n_1-1)=2^{m_2-1}\cdot(2n_2-1)$$
τότε $m_1=m_2$. Πράγματι αν $m_1\neq m_2$ θα είχαμε ότι ένας άρτιος ισούται με ένα περιττό αριθμό, άτοπο.
Οπότε, και $n_1=n_2$ και τελικά $(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$
και Προφανώς είναι επί η f

(β) Το $\mathbb{Z}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο.
Η $g:\mathbb{N}_0\to\mathbb{Z}$ με
$$g(n)=\begin{cases} k & \text{αν } n=2k,\ k\in\mathbb{N}_0 \\ -k & \text{αν } n=2k-1,\ k\in\mathbb{N} \end{cases}$$
είναι 1-1 και επί.
Άρα $\mathbb{N}_0\sim\mathbb{Z}$. Επίσης $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_0$ (1.3 (1)), επομένως $\mathbb{Z}\sim\mathbb{N}$. Άρα το $\mathbb{Z}$ άπειρο αριθμήσιμο

(γ) Το σύνολο $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{n}: a\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}$ των ρητών αριθμών είναι άπειρο αριθμήσιμο.
Πράγματι η συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ με $f(n)=\frac{n}{1}\ \forall n\in\mathbb{N}$ είναι 1-1, άρα $\mathbb{N}\preceq\mathbb{Q}$.
Επίσης η συνάρτηση
$$g:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q} \text{ με } g(a,n)=\frac{a}{n}$$
είναι επί του $\mathbb{Q}$ (από τον ορισμό του), άρα
$$\mathbb{Q}\preceq\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad (\text{Πρόταση } 1.5).$$
Άρα, $\mathbb{N}\preceq\mathbb{Q}\preceq\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.
Επίσης $\mathbb{Z}\sim\mathbb{N}$ (απο το (β)) και άρα $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$ (απο το (α)). Άρα, $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.
Από το Θεώρημα 1.6 Schröder-Bernstein έχουμε ότι $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$.

Υπεραριθμήσιμα Σύνολα

Ορισμός 3.1
Ένα σύνολο A λέγεται υπεραριθμήσιμα αν δεν είναι αριθμήσιμο (δηλαδή πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο)

Επομένως ένα σύνολο είναι άπειρο αν είναι άπειρο αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο, δηλαδή δεν είναι πεπερασμένο.

Πρόταση 3.2
Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to A$.

Απόδειξη
Έστω A άπειρο σύνολο. Το A δεν είναι πεπερασμένο, άρα δεν είναι κενό. Επομένως υπάρχει $a_1 \in A$. Θεωρούμε το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$. Αν $A \setminus \{a_1\} = \phi$ τότε $A = \{a_1\}$ είναι πεπερασμένο, άτοπο. Άρα $A \setminus \{a_1\} \neq \phi$. Επομένως υπάρχει $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Αν $A \setminus \{a_1, a_2\} = \phi \Leftrightarrow A = \{a_1, a_2\}$ τότε το A είναι πεπερασμένο σύνολο, άτοπο. Επομένως, $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \phi$ και υπάρχει $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Συνεχίζουμε επαγωγικά και ορίζουμε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ ώστε $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι $a_n \neq a_m$ αν $n \neq m$ $(n >$

Επομένως η συνάρτηση

$$f: \mathbb{N} \to A \text{ με } f(n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

είναι 1-1

Αντίστροφα, αν υπάρχει $f: \mathbb{N} \to A$ που είναι 1-1 το A είναι άπειρο, διότι αν ήταν πεπερασμένο

τότε θα υπήρχε $m \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $g: A \to T_m = \{1, 2, \dots, m\}$ 1-1 και επί.
Επομένως η σύνθεση
$$g \circ f: \mathbb{N} \to T_m$$
θα ήταν 1-1 συνάρτηση και ακολούθως το $\mathbb{N}$ θα ήταν πεπερασμένο σύνολο, Άτοπο!
Επομένως το A δεν είναι πεπερασμένο, είναι άπειρο

Παραδείγματα

1. Τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα.
2. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι άπειρο διότι η κανονική εμφύτευση
$$I: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad I(n) = n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$
είναι 1-1.
3. Εφ όσον $\mathbb{R} \sim (\alpha, \beta) \sim [a, \beta] \sim (a, \beta] \sim (a, +\infty) \sim (\alpha, -\infty)$ όλα τα διαστήματα είναι άπειρα σύνολα.

Πρόταση 3.4

Το σύνολο $[0, 1]$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη

Το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ είναι άπειρο.
Έστω ότι το $[0, 1]$ είναι άπειρο αριθμήσιμο.
Τότε $[0, 1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Διαιρούμε το $[0, 1]$ σε τρία κλειστά ίσα διαστήματα (μήκους $\frac{1}{3}$) τα
$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Τουλάχιστον ένα από αυτά δεν περιέχει το x_1. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_1.

Διαιρούμε τώρα το κλειστό διάστημα I_1 σε τρία κλειστά ίσα διαστήματα (μήκους $\frac{1}{3^2}$) Τουλάχιστον ένα απο αυτά δέν περιέχει το x_2. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_2.
Διαιρούμε τώρα το κλειστό διάστημα I_2 σε τρία ίσα κλειστά διαστήματα (μήκους $\frac{1}{3^3}$) και συνεχίζουμε ανάλογα ...

Έτσι δημιουργούμε μια φθίνουσα ($I_{n+1} \subseteq I_n$) ακολουθία κλειστών διαστημάτων $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $I_n = [a_n, b_n]$, όπου $b_n - a_n = \frac{1}{3^n} \to 0$ και $\boxed{x_n \notin I_n.}$

Απο την αρχή κιβωτισμού ισχύει

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

Τότε $x \in I_1 \subseteq [0,1]$, άρα $x = x_{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$
Άτοπο, διότι $x = x_{n_0} \notin I_{n_0}$ από την κατασκευή

ενώ $x = x_{n_0} \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $x = x_{n_0} \in I_{n_0}$.

Άρα το $[0,1]$ δέν είναι άπειρο αριθμήσιμο.

Αφού το $[0,1]$ δεν είναι πεπερασμένο (διότι $\frac{1}{n} \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}$) και δεν είναι άπειρο αριθμήσιμο απο την προηγούμενη απόδειξη)
το $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο

Έχουμε ότι:

$\mathbb{R} \sim (a,b) \sim [a,b] \sim [0,1] \sim (a,b] \sim (a+\infty) \sim (\alpha,-\infty)$

Άρα, όλα τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα.

Όλα τα άπειρα αριθμήσιμα σύνολα λέμε ότι έχουν πληθάριθμο $\aleph_0$.

Τα σύνολα που είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$ λέμε ότι έχουν πληθάριθμο $\aleph_1$. Έχουμε $\aleph_0 \preceq \aleph_1$ και επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$ είναι $\aleph_0 \neq \aleph_1$, άρα $\aleph_0 \prec \aleph_1$

Με τα σημερινά αξιώματα της συνολοθεωρίας δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε η ύπαρξη ούτε η ανυπαρξία συνόλου X με πληθάριθμο γνήσια μεγαλύτερο του $\aleph_0$ και γνήσια μικρότερο του $\aleph_1$.

<u>Θεώρημα 3.6 (Cantor)</u>

Για κάθε σύνολο X, ισχύει $X \prec \mathcal{P}(X)$, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$, δηλαδή ο πληθάριθμός του X είναι μικρότερος του $\mathcal{P}(X)$.

Απόδειξη

Για $X=\phi$ έχουμε $|\phi|=0$ και $|\mathcal{P}(\phi)| = |\{\phi\}| = 1$

Άρα, $0=|\phi| < |\mathcal{P}(\phi)| = 1$. Άρα ισχύει για $X=\phi$

Έστω $X \neq \phi$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$f: X \to \mathcal{P}(X)$ με $f(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$.

Η f είναι 1-1 $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \{x_1\} = f(x_1) \neq f(x_2) = \{x_2\}$

και άρα $X \sim \{\{x\} : x \in X\} \subsetneq \mathcal{P}(X)$

Άρα, $|X| \leq |\mathcal{P}(X)| \Leftrightarrow X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι δέν ισχύει $|X| = |\mathcal{P}(X)|$, άρα $|X| < |\mathcal{P}(X)| \Leftrightarrow X \prec \mathcal{P}(X)$.
Έστω ότι $|X| = |\mathcal{P}(X)| \Leftrightarrow X \sim \mathcal{P}(X)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ 1-1 και $\boxed{\text{επι.}}$
Για κάθε $x \in X$, έχουμε $\varphi(x) \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow \varphi(x) \subseteq X$.
Άρα, για κάθε $x \in X$ ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x \in \varphi(x) \quad \text{ή} \quad x \notin \varphi(x).$$

Έστω το σύνολο

$$B = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\} \subseteq X.$$

Αφού η φ είναι επί, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\varphi(x_0) = B$. Για το $x_0 \in X$ ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_0 \in B \quad \text{ή} \quad x_0 \notin B$$

Αν $x_0 \in B$, τότε $x_0 \notin \varphi(x_0) = B$, άτοπο.
Αν $x_0 \notin B$, τότε $x_0 \in \varphi(x_0) = B$, άτοπο.
ΑΤΟΠΟ!
Το άτοπο προέκυψε απο την υπόθεση ότι η φ είναι επί. Άρα, δεν υπάρχει $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ 1-1 και επί.
Επομένως $X \prec \mathcal{P}(X)$ (ισοδύναμα $|X| < |\mathcal{P}(X)|$).

Παρατηρήσεις

(i) Σύμφωνα με το Θεώρημα του Cantor ισχύει

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

Αναφέρουμε επίσης ότι

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$$

όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύνολο των αρρήτων αριθμών.