2. Ασκήσεις για διμελείς σχέσεις

16. Αν φ είναι μια διάταξη στο X, τότε η φ^{-1} είναι επίσης διάταξη.

1. Για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $(x,x) \in \rho$, άρα $(x,x) \in \rho^{-1}$.
2. Έστω $(x,y) \in \rho^{-1}$ και $(y,x) \in \rho^{-1}$. Τότε $(y,x) \in \varphi$ και $(x,y) \in \rho$. Αφού $(x,y) \in \rho$ και $(y,x) \in \rho$ έχουμε ότι $x = y$.
3. Έστω $(x,y) \in \rho^{-1}$ και $(y,z) \in \varphi^{-1}$. Τότε $(y,x) \in \rho$ και $(z,y) \in \rho$. Αφού $(z,y) \in \varphi$ και $(y,x) \in \varphi$ έχουμε ότι $(z,x) \in \rho$. Άρα, $(x,z) \in \rho^{-1}$

Επομένως η φ^{-1} είναι διάταξη στο X.

17. Είναι ολική διάταξη, διότι αν $X, Y \in A$, τότε είτε $X \subseteq Y$ είτε $Y \subseteq X$

18. Η σχέση ρ στο $\mathbb{N}$, όπου $(\alpha, \beta) \in \rho \Longleftrightarrow a | \beta$ είναι διάταξη στο $\mathbb{N}$. Δεν είναι ολική διάταξη Πράγματι, $(3,2) \notin \rho$ και $(2,3) \notin \rho$.

19. Έστω $X = \{1, 2, 6, 30, 210\}$. Αν $a, \beta \in X$, τότε είτε $a | \beta$ είτε β / a. Η σχέση φ στο X είναι ολική διάταξη.

20. (A, R_1), (B, R_2) είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα. Στο $A \times B$ ορίζεται η σχέση R:

$$(a, \beta) R (c, d) \text{ αν και μόνο αν } aR_1c \text{ και } \beta R_2 d.$$

1. $(a,\beta) R (a,\beta)$ διότι aR_1a και $\beta R_2 \beta$ $\forall (a,\beta) \in A \times B$.
2. Έστω $(a,\beta) R (\gamma,\delta)$ και $(\gamma,\delta) R (\varepsilon, \zeta)$. Τότε $aR_1\gamma$ και $\gamma R_1 \varepsilon$, άρα $aR_1\varepsilon$, επίσης $\beta R_2 \delta$ και $\delta R_2 \zeta$, άρα $\beta R_2 \zeta$, αφού R_1, R_2 είναι σχέσεις διάταξης. Επομένως, $(a,\beta) R (\varepsilon, \zeta)$.
3. Έστω $(a,\beta) R (\gamma,\delta)$ και $(\gamma,\delta) R (a,\beta)$. Τότε $(\alpha R_1 \gamma$ και $\beta R_2 \delta)$ και $(\gamma R_1 a$ και $\delta R_2 \beta)$. Άρα, $a = \gamma$ και $\beta = \delta$ και επομένως $(a,\beta) = (\gamma,\delta)$.

Επομένως η R είναι διάταξη στο $A \times B$.

Η R δεν είναι απαραίτητα ολική διάταξη.
Έστω $A=B=\mathbb{R}$ και $R_1=R_2$ είναι η συνήθης $\leq$ διάταξη στο $\mathbb{R}$.
Τότε για $(2,3),(1,5)\in A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ δεν ισχύει ούτε $(2,3)R(1,5)$ ούτε $(1,5)R(2,3)$.

21. Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζεται η σχέση ρ:

$$(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \Leftrightarrow y_1<y_2 \text{ είτε } y_1=y_2 \text{ και } x_1\leq x_2.$$

Η ρ είναι σχέση διάταξης, διότι:

1. $(x,y)\,\rho\,(x,y)$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(y=y,\ x\leq x)$
2. Αν $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)$ και $(x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1)$, τότε $y_1=y_2$ και $x_1=x_2$, άρα $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$
3. Αν $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)$ και $(x_2,y_2)\,\rho\,(x_3,y_3)$ τότε: είτε $y_1<y_2$ και $y_2<y_3$, άρα $y_1<y_3$,
είτε $y_1<y_2$ και $y_2=y_3$ και $x_2\leq x_3$, οπότε $y_1<y_3$,
είτε $y_1=y_2$ και $x_1\leq x_2$ και $y_2<y_3$, άρα $y_1<y_3$,
είτε $y_1=y_2$ και $x_1\leq x_2$ και $y_2=y_3$ και $x_2\leq x_3$,
άρα $y_1=y_3$ και $x_1\leq x_3$,
και επομένως σε κάθε περίπτωση $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_3,y_3)$.

Η ρ είναι ολική διάταξη διότι:
Για $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
(i) $y_1<y_2$, οπότε $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)$.
(ii) $y_2<y_1$, οπότε $(x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1)$.
(iii) $y_1=y_2$ και $x_1\leq x_2$ οπότε $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)$,
(iv) $y_1=y_2$ και $x_2<x_1$ οπότε $(x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1)$.

22. Έστω (A,R), (B,T) δύο ολικά διατεταγμένα σύνολα. Στο σύνολο $A\times B$ ορίζεται η λεξικογραφική διάταξη L ως ακολούθως:

$$(a,\beta)\,L\,(\gamma,\delta) \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{είτε } (a,\gamma)\in R \text{ και } a\neq\gamma, \\ \text{είτε } (\beta,\delta)\in T \text{ και } a=\gamma. \end{array}$$

Η σχέση L στο $A\times B$ είναι ολική διάταξη:

(α) Η σχέση L είναι διάταξη:

(1) $(a,\beta)L(a,\beta)$ για κάθε $(a,\beta)\in A\times B$, διότι $(\beta,\beta)\in T$. (ανακλαστική)

(2) Έστω $(a,\beta)L(\gamma,\delta)$ και $(\gamma,\delta)L(a,\beta)$.

Η περίπτωση $a\neq\gamma$ απορρίπτεται, διότι αν $a\neq\gamma$ τότε $(a,\gamma)\in R$, εφ' όσον $(a,\beta)L(\gamma,\delta)$, και

$(\gamma,a)\in R$, εφ' όσον $(\gamma,\delta)L(a,\beta)$

άρα $a=\gamma$, εφ' όσον R είναι σχέση διάταξης. Άτοπο

Επομένως ισχύει $a=\gamma$.

Άρα έχουμε ότι: $a=\gamma$, $(\beta,\delta)\in T$ και $(\delta,\beta)\in T$.

Επομένως, $a=\gamma$ και $\beta=\delta$, διότι η T είναι διάταξη, και τελικά $(a,\beta)=(\gamma,\delta)$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)

(3) Έστω $(a,\beta)L(\gamma,\delta)$ και $(\gamma,\delta)L(\varepsilon,\zeta)$ για $(a,\beta),(\gamma,\delta),(\varepsilon,\zeta)\in A\times B$.

Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

(i) $a\neq\gamma$, $(a,\gamma)\in R$ και $\gamma\neq\varepsilon$, $(\gamma,\varepsilon)\in R$

Τότε $(a,\varepsilon)\in R$, διότι R σχέση διάταξης και $a\neq\varepsilon$, διότι αν $a=\varepsilon$, τότε $(\gamma,\varepsilon)\in R$ και $(\varepsilon,\gamma)\in R$, οπότε $\gamma=\varepsilon$, άτοπο.

Επομένως στην περίπτωση (i) $(a,\beta)L(\varepsilon,\zeta)$.

(ii) $a\neq\gamma$, $(a,\gamma)\in R$ και $\gamma=\varepsilon$ $(\delta,\zeta)\in T$

Τότε $a\neq\varepsilon$ και $(a,\varepsilon)\in R$

Επομένως και στην περίπτωση (ii) $(\alpha,\beta)L(\varepsilon,\zeta)$.

(iii) $a=\gamma$, $(\beta,\delta)\in T$ και $\gamma\neq\varepsilon$, $(\gamma,\varepsilon)\in R$

Τότε $a\neq\varepsilon$ και $(a,\varepsilon)\in R$, άρα $(a,\beta)L(\varepsilon,\zeta)$.

(iv) $a=\gamma$, $(\beta,\delta)\in T$ και $\gamma=\varepsilon$, $(\delta,\zeta)\in T$

Τότε $a=\varepsilon$ και $(\beta,\zeta)\in T$, άρα $(a,\beta)L(\varepsilon,\zeta)$.

Άρα, η L είναι διάταξη.

(β) Η σχέση L είναι ολική διάταξη στο $A \times B$

Έστω (α, β), $(\gamma, \delta) \in A \times B$.

Περίπτωση I $\alpha \neq \gamma$

Το (A, R) είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο,
άρα είτε $(\alpha, \gamma) \in R$, είτε $(\gamma, \alpha) \in R$

Οπότε είτε $(\alpha, \beta) L (\gamma, \delta)$ είτε $(\gamma, \delta) L (\alpha, \beta)$

Περίπτωση II $\alpha = \gamma$

Το (B, T) είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο,
άρα είτε $(\beta, \delta) \in T$ είτε $(\delta, \beta) \in T$.

Οπότε είτε $(\alpha, \beta) L (\gamma, \delta)$ είτε $(\gamma, \delta) L (\alpha, \beta)$

Άρα η σχέση L είναι ολική διάταξη.