

Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης
Τελική Εξέταση 2-4-2024

Θέμα 1ο

6 × 0,5 = 3 μον.

Σωστό ή Λάθος; Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A, B, C \subseteq E$. Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(i) $B \subseteq (A \cap B^c)^c$.

(ii) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(A^c) = \emptyset$.

(iii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

(iv) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(v) Αν $A \subseteq B \subseteq C$ και $|A| = |C|$, τότε $|A| = |B|$.

(vi) Αν $|A| = |B|$ και η απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ είναι επί του B , τότε είναι και 1-1.

Θέμα 2ο

1,5 + 1,5 = 3 μον.

(α) Στο σύνολο \mathbb{N} θεωρούμε τη σχέση σ , όπου

$$n \sigma m \iff n|m \text{ (ο } n \text{ διαιρεί τον } m\text{)}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η σ είναι διάταξη και να εξετάσετε αν είναι ολική διάταξη.

(ii) Να βρείτε ένα άπειρο υποσύνολο του \mathbb{N} το οποίο είναι ολικά διατεταγμένο με την σ .

(β) Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ θεωρούμε τη σχέση \sim που ορίζεται ως εξής:

$$(m, n) \sim (p, q) \iff mq = np.$$

Να αποδείξετε ότι η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $(3, 6)$.

Θέμα 3ο

1,5 + 1,5 = 3 μον.

Έστω A, B, C σύνολα και $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ συναρτήσεις.

(α) Υποθέτουμε ότι η $g \circ f$ είναι επί του C .

(i) Είναι κατ' ανάγκη η g επί του C ;

(ii) Είναι κατ' ανάγκη η f επί του B ;

(β) Αν η $f : A \rightarrow B$ είναι 1-1, αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $h : B \rightarrow A$ επί του A .

Θέμα 4ο

0,9 + (3 × 0,7) = 3 μον.

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε **περιττό** φυσικό k , ο $2^k + 1$ διαιρείται με το 3.

(β) Να εξετάσετε αν καθένα από τα ακόλουθα υσύνολα του \mathbb{R}^2 είναι αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - a \in \mathbb{Q}\}$$

$$B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{Q} \text{ και } b - a = \sqrt{2}\}$$

$$C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{N} \text{ και } a^2 = b\}$$

Καλή Επιτυχία!