

**ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**  
**04/02/2022**

**ΘΕΜΑ 1.** Έστω  $A, B$  σύνολα.

- (α) Να ορίσετε την συμμετρική διαφορά  $A \Delta B$ .
- (β) Να δείξετε ότι

$$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B.$$

- (γ) Να υπολογίσετε το σύνολο  $\mathbb{Q} \Delta (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Έστω  $X, Y$  σύνολα,  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  και  $f : X \rightarrow Y$  απεικόνιση. Να ορίσετε την εικόνα  $f(A)$  του  $A$  και την αντίστροφη εικόνα  $f^{-1}(B)$  του  $B$ .

- (β) Να δείξετε ότι  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$  και η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν  $B \subseteq f(X)$ .

(γ) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ . Αν  $A = [-1, 1]$  και  $B = [0, 2]$ , να υπολογίσετε την εικόνα  $f(A)$  και την αντίστροφη εικόνα  $f^{-1}(B)$ .

**3.** Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  δίνεται η διμελής σχέση

$$xRy \Leftrightarrow \sin x = \sin y.$$

- (α) Να δείξετε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας.
- (β) Να υπολογίσετε την κλάση  $[\pi/2]$  του  $\pi/2$  και να ελέγξετε αν είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.
- (γ) Να δείξετε ότι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\{[x] : x \in \mathbb{R}\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

**4.** Θεωρούμε γνωστό το σύνολο των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N}$  και τις ιδιότητες του.

- (α) Να περιγράψετε την κατασκευή του συνόλου  $\mathbb{Z}$  (χωρίς αποδείξεις).
- (β) Να ορίσετε στο  $\mathbb{Z}$  πρόσθεση και να δείξετε ότι αυτή είναι καλά ορισμένη (ανεξάρτητη των αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας που χρησιμοποιούνται).
- (γ) Να δείξετε ότι η πρόσθεση έχει ουδέτερο στοιχείο.

**Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες**