

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

01/02/2021

ΟΜΑΔΑ Δ

4. Δίνονται δύο μη κενά σύνολα X, Y , $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση και $S \subseteq X$.

(α) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι δεν ισχύει γενικά η ισότητα $f^{-1}(f(S)) = S$.

(β) Αποδείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\forall S \subseteq X \quad f^{-1}(f(S)) = S \iff \eta \ f \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ 1 - 1.$$

5. Αποδείξτε ότι, για κάθε **περιττό** φυσικό k , ο $4^k + 3^k$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

6. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι πεπερασμένα, άπειρα αριθμήσιμα ή υπεραριθμήσιμα:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\},$$

$$B = f(\mathbb{R}^2), \text{ για την } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \frac{[x]}{1 + 2[y]},$$

όπου $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x ,

$$C = \{\text{οι κύκλοι στο επίπεδο με ακτίνα ρητό αριθμό}\}.$$