ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

1. Έστω A, B, C σύνολα. Εξετάστε αν ισχύουν οι ισότητες

(i) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

(ii) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$.

Απάντηση. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \setminus B) \times C &\Longrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ y \in C \\
&\Longrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \wedge \ x \notin B \\
&\Longrightarrow \ (x,y) \in A \times C \ \wedge \ (x,y) \notin B \times C \\
&\Longrightarrow \ (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)
\end{aligned}$$

άρα $(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C)$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) &\Longrightarrow (x,y) \in (A \times C) \ \wedge \ (x,y) \notin (B \times C) \\
&\Longrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \wedge \ (x \notin B \ \vee \ y \notin C) \\
&\Longrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ y \in C \ \wedge \ x \notin B) \\
&\qquad\quad \vee \ (x \in A \ \wedge \ \underline{y \in C \ \wedge \ y \notin C}) \\
&\Longrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ y \in C \ \wedge \ x \notin B) \\
&\Longrightarrow \ x \in A \setminus B \ \wedge \ y \in C \\
&\Longrightarrow \ (x,y) \in (A \setminus B) \times C
\end{aligned}$$

άρα $(A \times C) \setminus (B \times C) \subseteq (A \setminus B) \times C$ και δείξαμε την πρώτη ισότητα.

(ii) Εφαρμόζοντας κατά σειρά την ισότητα (i) αυτής της άσκησης, την (iii) της Πρότασης 7.5 και την (iv) της ίδιας πρότασης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \times C &= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \times C \\
&= [(A \cup B) \times C] \setminus [(A \cap B) \times C] \\
&= [(A \times C) \cup (B \times C)] \setminus [(A \times C) \cap (B \times C)] \\
&= (A \times C) \triangle (B \times C).
\end{aligned}$$

2. Δίνονται δύο μη κενά σύνολα X και Y και έστω $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ και $(A \times B)^c$ το συμπλήρωμα του $A \times B$ στο $X \times Y$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$.

(ii) Δώστε παράδειγμα στο οποίο ο ανωτέρω εγκλεισμός δεν είναι ισότητα.

Απάντηση. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(x,y)\in A^c\times B^c &\iff x\in A^c \ \wedge\ y\in B^c\\ &\iff x\notin A \ \wedge\ y\notin B\\ &\implies (x,y)\notin A\times B\\ &\iff (x,y)\in (A\times B)^c\end{aligned}$$

Η τρίτη συνεπαγωγή, που δεν είναι ισοδυναμία, μας οδηγεί στο αντιπαράδειγμα. Έστω $X=\{1,2\}$, $A=\{1\}$, $Y=\{a,b\}$ και $B=\{b\}$. Τότε

$$A^c\times B^c=\{(2,a)\},$$

ενώ

$$(A\times B)^c=\{(1,a),(2,a),(2,b)\}.$$

3. Θεωρούμε δύο ανακλαστικές σχέσεις ρ και σ στο X. Δείξτε ότι οι σχέσεις $\rho\cup\sigma$ και $\rho\cap\sigma$ είναι επίσης ανακλαστικές.

Απάντηση. Μια σχέση $R\subseteq X\times X$ είναι ανακλαστική, αν και μόνον αν

$$\mathcal{D}_X\subseteq R,$$

όπου $\mathcal{D}_X$ η διαγώνιος. Επομένως, από την υπόθεση, $\mathcal{D}_X\subseteq\rho$ και $\mathcal{D}_X\subseteq\sigma$. Αρα $\mathcal{D}_X\subseteq\rho\cap\sigma$ και $\mathcal{D}_X\subseteq\rho\cup\sigma$ και οι $\rho\cap\sigma$ και $\rho\cup\sigma$ είναι ανακλαστικές.

4. Θεωρούμε δύο συμμετρικές σχέσεις ρ και σ στο X. Να εξετάσετε αν οι σχέσεις $\rho\cup\sigma$, $\rho\cap\sigma$ και $\rho\setminus\sigma$ είναι επίσης συμμετρικές.

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(x,y)\in\rho\cup\sigma &\implies (x,y)\in\rho \ \vee\ (x,y)\in\sigma\\ &\implies (y,x)\in\rho \ \vee\ (y,x)\in\sigma\\ &\implies (y,x)\in\rho\cup\sigma\end{aligned}$$

και η $\rho\cup\sigma$ είναι συμμετρική. Επίσης,

$$\begin{aligned}(x,y)\in\rho\cap\sigma &\implies (x,y)\in\rho \ \wedge\ (x,y)\in\sigma\\ &\implies (y,x)\in\rho \ \wedge\ (y,x)\in\sigma\\ &\implies (y,x)\in\rho\cap\sigma\end{aligned}$$

και η $\rho \cap \sigma$ είναι συμμετρική. Τέλος,

$$\begin{aligned}(x,y) \in \rho \setminus \sigma &\implies (x,y) \in \rho \ \wedge\ (x,y) \notin \sigma \\ &\implies (y,x) \in \rho \ \wedge\ (y,x) \notin \sigma \\ &\implies (y,x) \in \rho \setminus \sigma\end{aligned}$$

και η $\rho \setminus \sigma$ είναι επίσης συμμετρική.

5. Έστω R_1 και R_2 δύο σχέσεις ισοδυναμίας στο ίδιο σύνολο X, με $R_1 \subseteq R_2$. Τί σχέση υπάρχει ανάμεσα στις διαμερίσεις $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ του X που αντιστοιχούν στις R_1 και R_2;

Απάντηση. Σταθεροποιούμε ένα $x \in X$. Ο εγκλεισμός $R_1 \subseteq R_2$ σημαίνει ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$xR_1y \implies xR_2y,$$

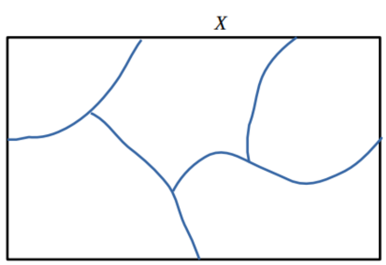
απ' όπου προκύπτει ότι $[x]_1 \subseteq [x]_2$. Δείχνουμε γενικότερα ότι

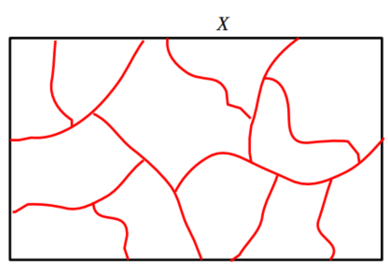
$$\forall\, y \in [x]_2 \ :\ [y]_1 \subseteq [x]_2.$$

Πράγματι, έστω $y \in [x]_2$, οπότε yR_2x και έστω $z \in [y]_1$. Τότε zR_1y, άρα zR_2y. Από την μεταβατικότητα της R_2, έχουμε zR_2x. Επομένως $z \in [x]_2$, που δείχνει ότι $[y]_1 \subseteq [x]_2$. Συμπεραίνουμε ότι η κλάση $[x]_2$ διαμερίζεται σε κλάσεις της R_1, ως εξής:

$$[x]_2 = \bigcup_{y \in [x]_2} [y]_1.$$

Στο πρώτο σχήμα παρακάτω φαίνεται η διαμέριση $\mathcal{D}_1$ και στο δεύτερο, η $\mathcal{D}_2$.





6. Στο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τις σχέσεις $\equiv_4$ και $\equiv_6$. Ποιά είναι η σχέση $\equiv_4 \cap \equiv_6$;

Απάντηση. Γνωρίζουμε ότι ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 6, εάν και μόνο εάν είναι πολλαπλάσιο του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιού τους, του 12. Συμβολίζουμε με R την $\equiv_4 \cap \equiv_6$. Τότε xRy αν και μόνον αν $x-y$ είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 6, άρα αν και μόνον αν είναι πολλαπλάσιο του 12. Επομένως, η R είναι η ισοδυναμία $\equiv_{12}$.

7. Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε την σχέση S ως εξής:

$$(a,b)S(c,d) \iff b=d.$$

(i) Δείξτε ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}^2$.
(ii) Περιγράψτε γεωμετρικά τις κλάσεις ισοδυναμίας.

Απάντηση. (i) Για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε $b=b$, άρα $(a,b)S(a,b)$ και η S είναι ανακλαστική. Αν $(a,b)S(c,d)$, τότε $b=d$, οπότε $d=b$, άρα $(c,d)S(a,b)$ και η S είναι συμμετρική. Τέλος, αν $(a,b)S(c,d)$ και $(c,d)S(e,f)$, τότε $b=d=f$, άρα $(a,b)S(e,f)$ και η S είναι μεταβατική. Επομένως είναι σχέση ισοδυναμίας.

(ii) Για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, είναι

$$[(a,b)] = \{(c,d) \in \mathbb{R}^2 \mid d=b\} = \{(x,b) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Γεωμετρικά, η κλάση του ζεύγους (a,b) είναι η οριζόντια ευθεία που τέμνει τον άξονα των y στο b.

8. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δίνονται οι διμελείς σχέσεις

$$\begin{aligned} xPy &\iff x-y = \text{ακέραιος, άρτιος} \\ xQy &\iff x-y = \text{ακέραιος, περιττός} \\ xRy &\iff \cos x = \cos y. \end{aligned}$$

(α) Να εξετάσετε ποιές από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας.
(β) Για όσες από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας να υπολογίσετε την κλάση $[\pi]$ του π.

Απάντηση. (1) Για την σχέση P: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x-x=0=$ άρτιος, άρα xPx και η P είναι ανακλαστική. Αν xPy, δηλ. $x-y=$ άρτιος, τότε $y-x$ είναι ο αντίθετος άρτιος, δηλ. yPx και η P είναι συμμετρική. Τέλος, αν xPy και yPz, δηλ. $x-y=$ άρτιος και $y-z=$ άρτιος, τότε $x-z$ είναι άρτιος, σαν άθροισμα δύο άρτιων, άρα xPz και η P είναι μεταβατική, συνεπώς και σχέση ισοδυναμίας.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff y - x = 2a,\ a \in \mathbb{Z} \\ &\iff y = x + 2a,\ a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$[\pi] = \{\pi + 2a \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

(2) Για την σχέση Q: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ δεν είναι περιττός, άρα η Q δεν είναι ανακλαστική και κατά συνέπεια ούτε σχέση ισοδυναμίας. Για την πληρότητα σημειώνουμε ότι δεν είναι ούτε μεταβατική, ενώ είναι συμμετρική.

(3) Για την σχέση R: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos x$, άρα xRx και η R είναι ανακλαστική. Αν xRy, δηλ. $\cos x = \cos y$, τότε $\cos y = \cos x$, δηλ. yRx και η R είναι συμμετρική. Τέλος, αν xRy και yRz, δηλ. $\cos x = \cos y$ και $\cos y = \cos z$, τότε $\cos x = \cos z$, άρα xRz και η R είναι μεταβατική, συνεπώς και σχέση ισοδυναμίας.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff \cos y = \cos x \\ &\iff y = 2k\pi \pm x,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$[\pi] = \{2k\pi \pm \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

9. Στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ θεωρούμε την διμελή σχέση

$$uRv \iff \exists\, \lambda \in R \setminus \{0\}\ :\ u = \lambda v.$$

Να δείξετε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε την κλάση $[(1,0,-1)]$.

Απάντηση. Η σχέση R είναι ανακλαστική, αφού για κάθε $u \in R^3$ ισχύει $u = 1 \cdot u$. Είναι συμμετρική, διότι αν uRv, δηλ. $u = \lambda v$, με $\lambda \neq 0$, τότε $v = \lambda^{-1} u$ και vRu. Τέλος, αν uRv και vRw, τότε υπάρχουν λ, $\mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda\mu \neq 0$, για τους οποίους ισχύει $u = \lambda v$ και $v = \mu w$. Επομένως $u = \lambda\mu w$, οπότε uRw, η R είναι μεταβατική άρα και σχέση ισοδυναμίας.

Σχετικά με την κλάση ισοδυναμίας, έχουμε

$$\begin{aligned} [(1,0,-1)] &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = \lambda(1,0,-1),\ \lambda \neq 0\} \\ &= \{(\lambda, 0, -\lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

10. (1) Στο $\mathbb{Z}_5$ να λυθούν οι εξισώσεις $[3] \cdot [x] = [4]$ και $[2] \cdot [y] = [4]$.

(2) Να λυθούν οι ίδιες εξισώσεις στο $\mathbb{Z}_6$.

Απάντηση. Στους δύο παρακάτω πίνακες φαίνονται τα αποτελέσματα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο Z_5:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[1]$	$[3]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[1]$	$[4]$	$[2]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Από τον δεύτερο πίνακα βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση $[x] = [3]$ και η δεύτερη έχει μοναδική λύση $[y] = [2]$.

Στους επόμενους πίνακες φαίνονται τα αποτελέσματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{Z}_6$:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[5]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$
$[5]$	$[0]$	$[5]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Από τον δεύτερο πίνακα βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση δεν έχει λύση ενώ η δεύτερη έχει δύο λύσεις: $[y] = [2]$ και $[y] = [5]$.

11. Έστω R μια διάταξη στο σύνολο X. Δείξτε ότι η αντίστροφη σχέση R^{-1} είναι επίσης διάταξη.

Απάντηση. Η αντίστροφη σχέση ορίζεται από την ισοδυναμία

$$(x, y) \in R \iff (y, x) \in R^{-1}.$$

(i) Επειδή για κάθε $x \in X$ είναι $(x, x) \in R$, έχουμε $(x, x) \in R^{-1}$ και η R^{-1} είναι ανακλαστική.

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$(x, y) \in R^{-1} \ \wedge \ (y, x) \in R^{-1} \implies (y, x) \in R \ \wedge \ (x, y) \in R \implies x = y$$

και η R^{-1} είναι αντισυμμετρική.

(iii) Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}(x,y) \in R^{-1} \ \wedge \ (y,z) \in R^{-1} &\Longrightarrow \ (y,x) \in R \ \wedge \ (z,y) \in R \\ &\Longrightarrow \ (z,x) \in R \\ &\Longrightarrow \ (x,z) \in R^{-1}\end{aligned}$$

και η R^{-1} είναι μεταβατική.

12. (1) Θεωρούμε το σώμα των μιγαδικών $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την λεξικογραφική διάταξη. Βρείτε μια τριάδα μιγαδικών z_1, z_2, z που ικανοποιούν τις $z_1 \leq z_2$ και $0 \leq z$, αλλά δεν ισχύει $z_1 z \leq z_2 z$.

(2) Δείξτε ότι το $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να εφοδιαστεί με ολική διάταξη που να ικανοποιεί τα αξιώματα (Π12)-(Π13) των πραγματικών αριθμών (βλ. Σ.Νεγρεπόντης - Σ. Γιωτόπουλος - Ε. Γιαννακούλιας : Απειροστικός Λογισμός , Τόμος I, σελ. 6).

Απάντηση. (1) Έστω $z_1 = 0 + 1i$, $z_2 = 0 + 2i$ και $z = 0 + 1i$. Τότε $z_1 \leq z_2$ και $0 \leq z$, αλλά $z_1 z = -1 \geq -2 = z_2 z$.

(2) Αν ένα σώμα F έχει ολική διάταξη που ικανοποιεί τα αξιώματα (Π12)-(Π13), τότε για κάθε $x \in F$, είναι $x^2 \geq 0$, πράγμα που δεν συμβαίνει στους μιγαδικούς.