# Ασκήσεις Φυσικοί Αριθμοί

1. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Ορίζεται αναδρομικά το $m^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ως ακολούθως:
$m^0 = 1$, και
$m^{n+1} = m^n \cdot m$ για καθε $n \in \mathbb{N}^0$.
Τότε $m^{n+r} = m^n \cdot m^r$ και $(m \cdot q)^r = m^r \cdot q^r$
για κάθε $n, r \in \mathbb{N}_0$ και $m, q \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη</u>

(α) $m^{n+r} = m^n \cdot m^r \ \forall \ m \in \mathbb{N},\ n, r \in \mathbb{N}_0$.

[Έστω $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Τότε:
$$A = \{r \in \mathbb{N}_0 : m^{n+r} = m^n \cdot m^r\} = \mathbb{N}_0$$
Για $r = 0$, έχουμε $m^{n+0} = m^n = m^n \cdot 1 = m^n \cdot m^0$.
Άρα, $0 \in A$.
Έστω $r \in A$, δηλαδή $m^{n+r} = m^n \cdot m^r$. Τότε
$m^{n+(r+1)} \underline{=} m^{(n+r)+1} = m^{n+r} \cdot m$ (ορισμός)
$= (m^n \cdot m^r) \cdot m$ (επαγωγική υπόθεση)
$= m^n \cdot (m^r \cdot m)$ (προσεταιριστική ιδιότητ.
$= m^n \cdot m^{r+1}$ (ορισμός
Άρα, $r+1 \in A$
Απο αρχή επαγωγής $A = \mathbb{N}_0$.]

(β) $(m \cdot q)^r = m^r \cdot q^r$ για κάθε $m, q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$.

[Έστω $m, q \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $B = \{r \in \mathbb{N}_0 : (m \cdot q)^r = m^r q^r\}$
$0 \in B$, διότι $(m \cdot q)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = m^0 \cdot q^0$.
Έστω $r \in B$, δηλαδή $(m \cdot q)^r = m^r \cdot q^r$.
Τότε $(m \cdot q)^{r+1} = (m \cdot q)^r \cdot (m \cdot q) =$ (ορισμός)
$= (m^r \cdot q^r) \cdot (m \cdot q)$ (επαγωγική υπόθεση)
$= ((m^r \cdot m) \cdot q^r) \cdot q$ (προσεταιριστική και μεταθετική)
$= (m^{r+1} \cdot q^r) \cdot q$ (ορισμός)
$= m^{r+1} \cdot (q^r \cdot q) = m^{r+1} \cdot q^{r+1}$ (προσεταιριστική)
Άρα, $r+1 \in B$. Απο αρχή επαγωγής $B = \mathbb{N}_0$.

**2.** (α) $3 \mid (n^3 - n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Για $n=1$ ισχύει, διότι $3 \mid 0$, διοτι $0 = 0 \cdot 3$.

Έστω $3 \mid n^3 - n$.

Θα αποδείξουμε ότι $3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 =$

$= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n$

Απο την επαγωγική υπόθεση $3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

Αρα $3 \mid (n^3 - n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(γ) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Για $n=1$ ισχύει διότι $1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

Εστω ισχύει για $n \in \mathbb{N}$. Τοτε

$1 \cdot 1! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$

$= (n+1)!\,(1 + (n+1)) - 1 = (n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$

Άρα ισχύει για $n+1$. Άρα ισχύει $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**3.** (γ) $q + q^2 + \dots + q^n = q \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, όπου $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Για $n = 1$ ισχύει, διοτι

$q = q \cdot 1 = q\,\dfrac{1-p}{1-p}$.

Εστω ισχύει για $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = q\,\dfrac{1 - p^n}{1-q} + q^{n+1} = q\left(\dfrac{1-p^n}{1-q} + q^n\right) =$

$= q\,\dfrac{(1 - p^n) + q^n(1-q)}{1-q} = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

Αρα ισχύει για $n+1$, και επομένως $\forall\, n \in \mathbb{N}$

**4.** (α) $n < 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$(1 < 2^1$ ισχύει. Έστω $n < 2^n$, τοτε $n+1 < 2^n + 1$ ισχύει

διότι $n < 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (επαγωγή) και $n+1 < 2^n < 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$

(β) $n! > n$ ισχύει $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$

$n = 3$ ισχύει και αν $n! > n$ για $n \geq 3$ τότε

$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1)\,n > n+1$ για $n \geq 3$

(επαγωγική υπόθεση)

6. Ορίζεται αναδρομικά το $n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$
$0! = 1$ και $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

(α) Ισχύει ότι ο $(n-r)! \cdot r!$ διαιρεί τον $n!$ για κάθε $r \in \mathbb{N}_0$ με $0 \leq r \leq n$ και $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει για $n=0$.

Πράγματι, για $r=0$ ($r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r \leq 0 \Rightarrow r=0$) ο $(n-r)! \cdot r! = 0! \cdot 0! = 1$ διαιρεί το $n=0$.

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ότι ο $(n-r)! \cdot r!$ διαιρεί το $n!$, όπου $0 \leq r \leq n$.

Τότε για κάθε $0 \leq r < n$ υπάρχει $\kappa_r \in \mathbb{N}_0$ ώστε $n! = (n-r)! \cdot r! \cdot \kappa_r$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $0 \leq r \leq n+1$ υπάρχει $\lambda_r \in \mathbb{N}_0$ ώστε $(n+1)! = (n+1-r)! \, r! \cdot \lambda_r$

Έστω $0 \leq r \leq n$.

Τότε $(n+1)! = (n-r)! \cdot r! \cdot \kappa_r \cdot (n+1) =$

$= (n+1-r)! \, (n-r) \cdot r! \, \kappa_r \cdot (n+1)$

$= (n+1-r)! \cdot r! \cdot (n-r) \cdot \kappa_r \cdot (n+1)$

$= (n+1-r)! \cdot r! \cdot \kappa_{r+1}$

Αν $r = n < n+1$ τότε: $n+1-r = 1$

$(n+1)! = r! \, (n+1) = (n+1-r)! \, r! \cdot (n+1)$

Άρα ισχύει ότι και ότι ο $(n+1-r)! \cdot r!$ διαιρεί το $(n+1)!$ για κάθε $0 \leq r \leq n+1$

Επομένως ο $(n-r)! \cdot r!$ διαιρεί το $n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$

(β) Για κάθε φυσικούς αριθμούς $n, r$ με $0 \leq r \leq n$ θέτουμε $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

Τότε $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0! \, n!} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

(κάνετε την απόδειξη)

(γ) Ισχύει $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$

και

(δ) $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\dots+\binom{n}{n}b^n.$

Απόδειξη

(γ) $$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}=$$

$$=\frac{n!\,(n-r+1)+n!\,r}{r!\,(n-r+1)!}=\frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}$$

(δ) Θα αποδείξουμε την ισότητα με επαγωγή.
Για $n=0$ ισχύει, διότι $(a+b)^0=1=\binom{0}{0}a^0$
Έστω ισχύει η ισότητα για το $n$.
Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$.

$$\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^{n+1}b+\dots+\binom{n+1}{r}a^{n+1-r}b^r+\dots+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}=$$

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^{n+1}b+\dots+\binom{n+1}{r}a^{n+1-r}b^r+\dots+\binom{n+1}{n}ab^n=$$

$$=a^{n+1}+b^{n+1}+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right)a^{n+1}b+\dots+\left(\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\right)a^{n+1-r}b^r+\dots+\left(\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right)ab^n=$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^{n+1}b+\dots+\binom{n}{r}a^{n+1-r}b^r+\dots+\binom{n}{n}ab^n+$$
$$+\binom{n}{0}b^{n+1}+\binom{n}{0}a^{n+1}b+\dots+\binom{n}{r-1}a^{n+1-r}b^r+\dots+\binom{n}{n-1}ab^n=$$

$$a\cdot\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^nb+\dots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\dots+\binom{n}{n}b^n\right]+$$

$$+b\cdot\left[\binom{n}{0}b^n+\binom{n}{0}a^{n+1}+\dots+\binom{n}{r-1}a^{n-(r-1)}b^{r-1}+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}\right]=$$

$$=a\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+b\cdot\sum_{r=1}^{n+1}\binom{n}{r-1}a^{n+1-r}b^{r-1}$$

$$=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right)=(a+b)(a+b)^n=(a+b)^{n+1}$$

Άρα ισχύει για ισότητα για $n+1$, και άρα $\forall n\in\mathbb{N}$.

9 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$

Ισχύει για $n=1$, $\frac{1}{1^2}\leq 2-1 \iff 1\leq 1$ ισχύει.
Έστω ότι

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

Τότε $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq \left(2-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}$

και

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}=2-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

[ διότι $\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}\geq\frac{1}{n+1}\iff\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\iff$

$\iff\frac{1}{n}\geq\frac{n+2}{(n+1)^2}\iff(n+1)^2\geq n(n+2)\iff$

$\iff n^2+2n+1\geq n^2+2n\iff 1\geq 0$ ισχύει ]

10 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}-1$

Ισχύει για $n=1$ $\quad 1\leq 2\sqrt{1}-1=1$
Έστω ότι ισχύει για $n$.
Τότε

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

και $2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2\sqrt{n+1}-1\iff$

$$2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2\sqrt{n+1}\iff$$

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\leq 2(n+1)-1$$

$$\sqrt{n(n+1)}\leq 2(n+1)$$

$$\sqrt{n(n+1)}\leq\sqrt{(n+1)^2}\text{ ισχύει.}$$

Άρα ισχύει για $n+1$. Επομένως ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$

(14) Αριθμοί Fibonacci ορίζονται αναδρομικά:

$u_1 = 1,\ u_2 = 2$ και $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\ \forall\ n \geq 2$

Επομένως, $u_1 = 1,\ u_2 = 2$ και κάθε αριθμός Fibonacci $u_n$ για $n > 2$ είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων αριθμών Fibonacci.

Άρα οι αριθμοί Fibonacci είναι:

$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία των αριθμών Fibonacci είναι γνήσια αύξουσα ($u_{n+1} - u_n = u_{n-1} > 0$ για $n \geq 3$) και $n < u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Οπότε, από την αρχή ελαχίστου για κάθε $K \in \mathbb{N}$ με $3 < K$ θα υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ ώστε $u_n \leq K < u_{n+1}$.

Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται ως άθροισμα αριθμών Fibonacci κατά μοναδικό τρόπο.

Έστω $A = \{K \in \mathbb{N} : K = u_{n_1} + \cdots + u_{n_\lambda},\ \lambda \in \mathbb{N};\ u_{n_1} > \cdots > u_{n_\lambda}\} \subseteq \mathbb{N}$

Θα αποδείξουμε ότι $A = \mathbb{N}$

$1, 2, 3 \in A$ Άρα $A \neq \emptyset$.

Έστω $3 < K$ και $K \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ (μοναδικό) ώστε $u_{n_1} \leq K < u_{n_1+1} = u_{n_1} + u_{n_1-1}$

Άρα $K = u_{n_1} + K_1$ και $0 \leq K_1 < u_{n_1-1}$

Αν $K_1 = 0$ τελειώσαμε.

Αν $0 < K_1$, τότε $0 < K_1 < u_{n_1-1}$. Αν $K_1 = 1, 2, 3$ τελειώσαμε διότι $K = u_{n_1} + K_1$ $K_1 \in \{u_1, u_2, u_3\}$

Αν $3 < K_1$ συνεχίζουμε ανάλογα με το $K_1 > 3$ αντί του $K$, όπου $K_1 < u_{n_1-1}$

Η διαδικασία αυτή θα τελειώσει σε πολύ $K-3$ πεπερασμένα βήματα διότι $3 < K_1 < K$ και θα έχουμε $K = u_{n_1} + \cdots + u_{n_\lambda}$ $\lambda < K$

Η μοναδικότητα αφήνεται για άσκηση.

16. Έστω ένας αριθμός $a_n \in \mathbb{N}$ με δεκαδικό ανάπτυγμα της μορφής $a_n = \underbrace{xxx\ldots xx}_{3^n \text{ φορές}}$ με $3^n$ όμοια ψηφία. Τότε ο $a_n$ διαιρείται με το $3^n$.

Απόδειξη Έστω $x \in \{1, \ldots 9\}$, και
$a_n = x + 10x + \cdots + 10^{3^n-1} \cdot x$, για $n \in \mathbb{N}$. Τότε $3^n / a_n$.

Απόδειξη με επαγωγή στο $n$.

Για $n=1$ $a_1 = x + 10x + 10^2 x = xxx = x.111 = x.37.3$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$

δηλαδή $3^n | x + 10x + \ldots + 10^{3^n-1} x = a_n$

Τότε:

$$a_{n+1} = a_n + 10^{3^n} \cdot a_n + 10^{2 \cdot 3^n} a_n$$

Άρα $3 | a_{n+1}$

επομένως ισχύει ότι ο $a_n$ διαιρείται με το $3^n$

13 Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ και $b_1, b_2, \ldots, b_n$ πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$(a_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη

Για $n=2$ έχουμε την ανισότητα

$$(*) \quad (a_1 b_1 + \alpha_2 b_2)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1^2 b_1^2 + \alpha_2^2 b_2^2 + 2 a_1 b_1 \alpha_2 b_2 \leq \alpha_1^2 b_1^2 + \alpha_1^2 b_2^2 + \alpha_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \alpha_1^2 b_2^2 + \alpha_2^2 b_1^2 - 2\alpha_1 b_1 \alpha_2 b_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq (a_1 b_2 + \alpha_2 b_1)^2 \quad \text{που ισχύει.}$$

Έστω ότι ισχύει η ανισότητα για $n = k$

$$(a_1 b_1 + \cdots + \alpha_k b_k)^2 \leq (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2)(b_1^2 + \cdots + b_k^2). \quad (**)$$

Τότε από την $(**)$:

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1})^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + \cdots a_k^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_k^2} + a_{k+1} b_{k+1}\right)^2$$

από $(*)$ $\leq \left((a_1^2 + \cdots + \alpha_k^2) + a_{k+1}^2\right) \cdot \left((b_1^2 + \cdots + b_k^2) + b_{k+1}^2\right)$

$$= (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{k+1}^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_{k+1}^2)$$

Επομένως ισχύει η ανισότητα για $n = k+1$

Άρα από την επαγωγή ισχύει η ανισότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$

18. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ και $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$.

(α) $\text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta)=1$

Αν $\alpha=\beta$, τότε $1=\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=\alpha=\beta \Longrightarrow \text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta)=1$

Έστω $\alpha>\beta$, και $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$.

Έστω $\kappa=\text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta)\in\mathbb{N}$

Άρα ο $\kappa$ διαιρεί το $\alpha\cdot\beta$, και από το Λήμμα 5,

$\kappa = x\cdot y$ όπου $x|\alpha$, $y|\beta$ και $\text{ΜΚΔ}(x,y)=1$.

Έχουμε $\kappa|\alpha+\beta$. Άρα, $\alpha+\beta=\kappa\cdot\pi = x\cdot y\cdot\pi$

για $\pi\in\mathbb{N}$, και $y|\beta$, άρα $\beta=y\cdot\mu$ για $\mu\in\mathbb{N}$.

Άρα, $\alpha = x\cdot y\cdot\pi - y\cdot\mu = y(x\pi-\mu)$.

Άρα, $y|\alpha$. Έχουμε και ότι $y|\beta$,

επομένως $y|\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$.

Συνεπώς $y=1$.

Ανάλογα, $x|\alpha$, άρα $\alpha=x\cdot\nu$ για $\nu\in\mathbb{N}$.

Άρα, $\beta = x\cdot y\cdot\pi - x\nu = x(y\cdot\pi-\nu)$ και

επομένως $x|\beta$. Συνεπώς $x|\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$

και τελικά $x=1$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\kappa = x\cdot y = 1$.

(β) $\text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta, \alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)=1$

Από το (α) έχουμε $\text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta,\alpha\beta)=1$

Έστω $\kappa=\text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta,\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Έχουμε $\kappa|\alpha+\beta$, άρα $\kappa|(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Επομένως $\kappa|(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha\cdot\beta$

Επίσης $\kappa|\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

Συνεπώς $\kappa|\alpha\beta$, και τελικά το $\kappa$

διαιρεί το $\text{ΜΚΔ}(\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta)=1$.

Ισχύει λοιπόν $\kappa=1$

(γ) Απόδειξη ανάλογη με το (β).

19 (α) ΜΚΔ$(\alpha, \beta\cdot\gamma)=1$ αν και μόνο αν ΜΚΔ$(\alpha, \beta)$ = ΜΚΔ$(\alpha, \gamma) = 1$

Απόδειξη

Έστω ΜΚΔ$(\alpha, \beta\cdot\gamma)=1$. Αν $\kappa\in\mathbb{N}$, $\kappa|\alpha$ και $\kappa|\beta$, τότε $\kappa|\alpha$ και $\kappa|\beta\cdot\gamma$, άρα $\kappa|1$, οπότε $\kappa=1$. Επομένως ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$. Ομοίως ΜΚΔ$(\alpha,\gamma)=1$.

Έστω ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$ και ΜΚΔ$(\alpha,\gamma)=1$.
Αν $\kappa\in\mathbb{N}$, $\kappa|\alpha$ και $\kappa|\beta\cdot\gamma$,
τότε, αφού ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$, έχουμε ΜΚΔ$(\kappa,\beta)=1$ και άρα, απο το Λήμμα 2, $\kappa|\gamma$ (αφού $\kappa|\beta\cdot\gamma$) Επομένως ο $\kappa$ είναι κοινός διαιρέτης των $\alpha, \gamma$, και άρα $\kappa=1$ (ΜΔΚ$(\alpha,\gamma)=1$) Συνεπώς ΜΚΔ$(\alpha,\beta\cdot\gamma)=1$

(β) Αν ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$ και $\gamma|\beta$, τότε ΜΚΔ$(\alpha,\gamma)=1$.
Αφού $\gamma|\beta$, έχουμε ότι $\beta=\delta\cdot\gamma$ για $\delta\in\mathbb{N}$.
Αν ΜΚΔ$(\alpha,\gamma)=\kappa$, τότε $\kappa|\alpha$ και $\kappa|\gamma$.
Αφού $\kappa|\gamma$ έχουμε ότι $\kappa|\beta$ (διότι $\gamma|\beta \Leftrightarrow \beta=\gamma\cdot\mu$)
Άρα, $\kappa|\alpha$, $\kappa|\beta$ και ΜΚΔ$(\alpha,\gamma)=1$, οπότε $\kappa=1=$ ΜΚΔ$(\alpha,\gamma)$

(γ) (άσκηση)

(δ) Έστω ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$. Έστω $p$ πρώτος αριθμός ώστε $p|\alpha^2$ και $p|\beta^2$. Τότε $p|\alpha\cdot\alpha$ και $p|\beta\cdot\beta$, άρα από προαναφερόμενο Θεώρημα, $p|\alpha$ και $p|\beta$. Επομένως $p=1$, διότι ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$. Άρα απο το Θεμελιώδες Θεώρημα έχουμε ότι ΜΚΔ$(\alpha^2,\beta^2)=1$.
Επίσης, αν ΜΚΔ$(\alpha^2,\beta^2)=1$, τότε ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=1$, διότι αν $\kappa\in\mathbb{N}$, $\kappa|\alpha$ και $\kappa|\beta$, τοτε $\kappa|\alpha^2$ και $\kappa|\beta^2$, άρα $\kappa=1$, διότι ΜΚΔ$(\alpha^2,\beta^2)=1$.