Θεμέλια των Μαθηματικών – 2008-09

2ο Υπόδειγμα Θεμάτων

Θέμα 1 (2 μον.) (α) Έστω A και B δύο σύνολα. Δείξτε ότι $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(β) Έστω A, B και C τρία σύνολα. Εξετάστε αν ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C)\\ (A \triangle B) \times C &= (A \times C) \triangle (B \times C).\end{aligned}$$

Θέμα 2 (2 μον.) (α) Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Πότε μια σχέση $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ λέγεται: (i) ανακλαστική; (ii) αντισυμμετρική; (iii) μεταβατική;

(β) Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\rho}$ στο $\mathbb{N}$ ως εξής:

$$(a, b) \in \rho \text{ αν } a|b \text{ (ο } a \text{ είναι διαιρέτης του } b).$$

Είναι η $\boldsymbol{\rho}$ ανακλαστική; αντισυμμετρική; μεταβατική; σχέση διάταξης; Αν ναι, είναι ασθενής διάταξη; Είναι γνήσια διάταξη;

Θέμα 3 (2 μον.) (α) Έστω X, Y μη κενά σύνολα και έστω $g : Y \to X$ συνάρτηση επί. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ ώστε $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

(β) Έστω X, Y μη κενά σύνολα και έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση. Αν $A, B \subseteq Y$ ορίστε τα σύνολα $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B)$ και δείξτε ότι $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Θέμα 4 (2 μον.) (α) Εξετάστε αν οι προτάσεις $(p \wedge q) \longrightarrow (\neg p \wedge q)$ και $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(β) Δείξτε ότι: αν οι $P \leftrightarrow Q$, $Q \to R$ και $R \leftrightarrow S$ είναι αληθείς, τότε και η $P \to S$ είναι αληθής.

Θέμα 5 (2 μον.) (α) Έστω $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $z + \frac{1}{z} = 2 \sin \alpha$. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

(β) Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας, δείξτε ότι

$$(1 + 2z_1 + 3z_2) \cdot (1 + 2z_2 + 3z_1) = 3.$$

(γ) Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, να λυθεί η εξίσωση

$$(1 + z)^{2n} + (1 - z)^{2n} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 6 (2 μον.) (α) Έστω A ένα σύνολο από κυκλικούς δίσκους στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Δείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω A ένα σύνολο από κύκλους στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το A αναγκαστικά αριθμήσιμο;

(γ) Έστω A ένα σύνολο από οχτάρια στο επίπεδο, τα οποία ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το A αναγκαστικά αριθμήσιμο;