Θεμέλια των Μαθηματικών – 2008-09

1ο Υπόδειγμα Θεμάτων

Θέμα 1 (2 μον.) Δίνονται τα σύνολα $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{a, \{a\}, b\}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

$$\text{(i)}\quad \emptyset \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{(ii)}\quad \emptyset \subseteq \mathcal{P}(A) \qquad \text{(iii)}\quad \{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$$

$$\text{(iv)}\quad \{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B) \qquad \text{(v)}\quad \{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B) \qquad \text{(vi)}\quad \{\{a\}, b\} \subseteq \mathcal{P}(B).$$

(β) Έστω A, B και C τρία σύνολα. Δείξτε ότι

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Θέμα 2 (2 μον.) (α) Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Πότε μια σχέση $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ λέγεται: (i) ανακλαστική; (ii) συμμετρική; (iii) μεταβατική; (iv) σχέση ισοδυναμίας;

(β) Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\rho} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ως εξής: $(x, y) \in \boldsymbol{\rho}$ αν και μόνο αν $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$. Εξετάστε αν η $\boldsymbol{\rho}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Αν ναι, γράψτε πέντε διαφορετικά στοιχεία της κλάσης ισοδυναμίας του $\sqrt{2}$.

Θέμα 3 (2 μον.) (α) Έστω X, Y μη κενά σύνολα και έστω $f : X \to Y$ 1-1 συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : Y \to X$ ώστε $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις f και $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ορίζονται ως εξής:

$$f(n) = n + 1, \qquad h(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 2 & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $f \circ f$, $f \circ h$ και $h \circ f$.

Θέμα 4 (2 μον.) (α) Εξετάστε αν οι προτάσεις $(p \wedge q) \to (\neg p \wedge q)$ και $\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to p)$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(β) Δείξτε ότι: αν οι $P \to Q$ και $Q \to S$ είναι αληθείς, τότε και η $P \to S$ είναι αληθής.

Θέμα 5 (2 μον.) (α) Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| < 1$ και $|z_2| < 1$. Δείξτε ότι

$$|z_1 - z_2| < |1 - \overline{z_1} z_2|.$$

(β) Αφού γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $w = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ σε τριγωνομετρική μορφή, υπολογίστε την τιμή της παράστασης w^{9m}, για $m \in \mathbb{Z}$.

(γ) Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, να λυθεί η εξίσωση

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 6 (2 μον.) Μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται φθίνουσα αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$A_{n+1} \subseteq A_n.$$

(α) Αποδείξτε ότι αν η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

(β) Αποδείξτε ότι αν οι ακολουθίες συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσες, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$