Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Μιγαδικοί αριθμοί – Ασκήσεις

1. (α) Αν $|z| < 1$ και $\lambda > 0$, αποδείξτε ότι $|\lambda z| < \lambda$.

(β) Αν το μέτρο καθενός από τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \dots z_k$ είναι μικρότερο του 1 και για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ισχύει $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, να αποδείξετε ότι $|\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_k z_k| < 1$.

2. Αν $z, v, w \in \mathbb{C}$ με $z + v + w \neq 0$ και $|z| = |v| = |w| = \rho$, αποδείξτε ότι:
(α) $\frac{1}{z} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{\overline{z}+\overline{v}+\overline{w}}{\rho^2}$.
(β) $\left|\frac{zv+vw+wz}{z+v+w}\right| = \rho$.

3. (α) Αποδείξτε ότι $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ αν και μόνον αν $\mathrm{Im}(z) > 0$.

(β) Αν $\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right| + \cdots + \left|\frac{z_n-i}{z_n+i}\right| < 1$, αποδείξτε ότι $\left|\frac{z_1+\cdots+z_n-i}{z_1+\cdots+z_n+i}\right| < 1$.

4. (α) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

(1) $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, (2) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, (3) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

(β) Εξηγήστε γεωμετρικά γιατί η ισχύς οποιωνδήποτε δύο εκ των παραπάνω σχέσεων συνεπάγεται την τρίτη.

(γ) Αποδείξτε αλγεβρικά το (β).

5. Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:
(α) $(|z - i| - 1) \cdot (|z - 1| - 2) < 0$.
(β) $(|z + 1| - |z - i|) \cdot (|z - 3 + 3i| - 2) < 0$.

6. Δίνεται το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| = \sqrt{2}\}$.

(α) Να βρείτε τα $z \in A$ για τα οποία η παράσταση $|z - 4|$ γίνεται μέγιστη καθώς και την μέγιστη αυτή τιμή.

(β) Από όλους τους μιγαδικούς $w = \lambda - 2\lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε αυτόν που ελαχιστοποιεί την παράσταση $|z - w|$ όταν $z \in A$, καθώς και την ελάχιστη αυτή απόσταση.

7. Δίνεται η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = z + \frac{2}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$. Να βρεθούν:
(α) Η εικόνα του κύκλου $|z| = 1$ μέσω της f.
(β) Η εικόνα της ημιευθείας $y = x$, $x > 0$ μέσω της f.

8. Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $O(0,0)$ και $A(2,0)$, αποδείξτε ότι ο $w = \frac{1}{z}$ κινείται σε κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

9. Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$, με $z^2 + w^2 = zw$, αποδείξτε ότι:

(α) $z^3 + w^3 = 0$.

(β) Το τρίγωνο με κορυφές την αρχή των αξόνων O και τις εικόνες $M_1(z)$, $M_2(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο, είναι ισόπλευρο.

(γ) $\left(\frac{z}{w}\right)^{13} + \left(\frac{w}{z}\right)^{13} = 1$.

10. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $0 < \mathrm{Im}(z_0) < 999$ και το σύνολο A των μιγαδικών αριθμών z, με $z \neq z_0$ και $z \neq \overline{z_0}$, που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{|z - z_0|} + \frac{1}{|z - \overline{z_0}|} = \frac{1998}{|z - z_0| \cdot |z - \overline{z_0}|}.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου A. Ποιοί είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί; Να εξετάσετε την περίπτωση που $z_0 = \overline{z_0}$.

11. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$. Κατόπιν να βρεθούν αυτοί με το μέγιστο κι ελάχιστο μέτρο.

12. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z που επαληθεύουν την $2z^2 + 3z = 2\overline{z}^2 + 3\overline{z}$.

13. Αν η εικόνα $M(z)$ του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ κινείται πάνω σε κύκλο με κέντρο το $(-2, 1)$ κι ακτίνα $\rho = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(w)$ των μιγαδικών w που ικανοποιούν τη σχέση $w - 2z = -2 + 4i$.

14. Δίνεται σταθερός μιγαδικός αριθμός $a+bi$. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $z = x + yi$ όταν ισχύει

$$\overline{a + bi} \cdot z + (a + bi)\overline{z} = 0.$$

15. Αν ο μιγαδικός z ικανοποιεί την $(1 - i)z + (1 + i)\overline{z} + c = 0$, τότε να βρεθεί η καμπύλη που διαγράφει η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{1}{z}$ όταν: (α) $c = 0$, (β) $c = 1$.

16. Αν $|z| = 1$ και $z^2 + w^2 = 0$, αποδείξτε ότι $|z^n + w^n| \in \{0, \sqrt{2}, 2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

17. (α) Αν $\rho > 0$ να γράψετε στην τριγωνομετρική μορφή τους παρακάτω μιγαδικούς:

$$z_1 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta), \qquad z_2 = -\rho(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z_3 = \rho(\sin\theta + i\cos\theta).$$

(β) Να βρείτε ένα όρισμα του $w = -(\cos\theta - i\sin\theta)^3(\sin\theta + i\cos\theta)^4$.

18. Να γραμμοσκιάσετε το χωρίο που ορίζεται από τις εικόνες των μιγαδικών z όταν $\frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ και $1 \leq |z| \leq 2$.

19. Βρείτε το μέτρο κι ένα όρισμα του $z = (-\cos a + i\sin a)(\sin a - i\cos a)$.

20. Αν $\operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{8}$, να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός φυσικός n ώστε $z^n + \overline{z}^n = 0$.

21. (α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών $z = x + yi$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{|z-3|}{|z+6|} = 2.$$

(β) Να βρεθούν οι μιγαδικοί του παραπάνω τόπου με το μέγιστο κι ελάχιστο πρωτεύον όρισμα και να γραφούν στη μορφή $a + bi$.

21′. Να βρεθεί το πρωτεύον όρισμα του z όταν:
(α) ο z είναι θετικός πραγματικός.
(β) ο z είναι αρνητικός πραγματικός.
(γ) $z = x - xi$, $x < 0$.
(δ) ο z είναι φανταστικός.

22. Δίνεται ο μιγαδικός $z_0 \neq 0$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, A η εικόνα του z_0 και B η εικόνα του iz_0, να βρεθεί ως συνάρτηση του z_0 η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο AOB.

23. (α) Αν η εικόνα $M(z)$ του μιγαδικού $z = a + bi$ κινείται πάνω σε κύκλο με κέντρο το $(-2, 1)$ κι ακτίνα $\rho = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(w)$ των μιγαδικών w που ικανοποιούν τη σχέση $w - 2z = -2 + 4i$.

(β) Βρείτε το μέτρο των μιγαδικών του παραπάνω γεωμετρικού τόπου που έχουν μέγιστο κι ελάχιστο πρωτεύον όρισμα.

24. Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν οι $z - w = 2 + 2\sqrt{3}i$ και $zw = 2 - 2i$, αποδείξτε ότι

$$\operatorname{Arg}[(z+w)^2] = \frac{\pi}{2}.$$

25. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$, αποδείξτε ότι τα πρωτεύοντα ορίσματα των z_1, z_2 διαφέρουν κατά $\pi/3$ και κατόπιν ότι $z_1^3 + z_2^3 = 0$.

26. (α) Βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z όταν ο

$$w = \frac{|z|^2 + z^2}{2} - \operatorname{Im}(z - i)$$

έχει όρισμα $\pi/2$ ή $-\pi/2$.

(β) Να βρεθούν οι μιγαδικοί του παραπάνω συνόλου με το μέγιστο κι ελάχιστο πρωτεύον όρισμα.

27. Αν το πολυώνυμο $P(z) = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ έχει μόνο δύο πραγματικές ρίζες, αποδείξτε ότι έχει τουλάχιστο ένα μιγαδικό συντελεστή.

28. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι πολυωνυμικές εξισώσεις:

(α) $z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 4z + 13 = 0$ αν μια ρίζα της είναι το i.

(β) $z(z^2 + 9) = 2(2z^2 + 5)$ αν μια ρίζα της είναι ο $1 + 2i$.

29. Αποδείξτε ότι το μιγαδικό πολυώνυμο

$$P(z) = (\cos a + z \sin a)^k - (\cos(ka) + z \sin(ka)), \qquad k \geq 1$$

έχει παράγοντα τον $z^2 + 1$.

30. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + bx + \gamma$. Αν z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικές ρίζες του πολυώνυμου, αποδείξτε ότι:

(α) Οι συντελεστές b και γ είναι πραγματικοί.

(β) Η εξίσωση $x^2 + bx - \gamma = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

31. Δίνεται ότι ο αριθμός $1+3i$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 70 = 0$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

(α) Βρείτε τα a, b.

(β) Βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες της εξίσωσης.

32. Δίνεται το πολυώνυμο $P(z) = z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 4z + 2$, $z \in \mathbb{C}$.

(α) Να βρεθούν οι κοινές ρίζες των εξισώσεων $z^3 = 1$ και $P(z) = 0$.

(β) Να βρεθούν οι ρίζες της $P(z) = 0$.

(γ) Να γραφεί το $P(z)$ ως γινόμενο πρωτοβαθμίων ή δευτεροβαθμίων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες έχουν αρνητική διακρίνουσα.

33. Αν $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ είναι οι n-οστές ρίζες της μονάδας, $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\zeta_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, τότε $\zeta_k = \zeta_1^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(β) $1 + \zeta_1^p + \cdots + \zeta_{n-1}^p = n$ αν ο $p \in \mathbb{N}$ είναι πολλαπλάσιο του n και 0 αλλιώς.

34. Αν $1, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ είναι οι ρίζες της $z^n = 1$, αποδείξτε ότι:

(α) Οι $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0$.

(β) $(1 - \omega_1)(1 - \omega_2) \cdots (1 - \omega_{n-1}) = n$.

(γ) Έστω $A_1 A_2 \cdots A_n$ κανονικό n-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $\rho = 1$. Να υπολογιστεί το γινόμενο των αποστάσεων μιας κορυφής από τις υπόλοιπες.

35. Αν $1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ είναι οι n-οστές ρίζες της μονάδας, $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:

$$|z - 1|^2 + |z - \zeta_1|^2 + \cdots + |z - \zeta_{n-1}|^2 = n(|z|^2 + 1).$$

Να ερμηνευθεί γεωμετρικά η παραπάνω ισότητα.

36. Αν z_0, z_1, z_2 είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας, αποδείξτε ότι $(4z_0 + 7z_1 + 4z_2)^3 = 27$.

37. Αν για το $P(z) = z^3 + az^2 + bz + \gamma$, $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι οι εικόνες των ριζών του είναι συνευθειακά σημεία και μια από αυτές είναι ο $1-2i$, να υπολογιστούν τα a, b και γ.

38. Αν $w^n = 1$ δείξτε ότι $1+2w+3w^2+\cdots+nw^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$ αν $w = 1$ και $= \frac{n}{w-1}$ αν $w \neq 1$.

39. Δίνεται η εξίσωση $z^n = \overline{z}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι:
(α) Οι μη μηδενικές λύσεις έχουν μέτρο 1.
(β) Η εξίσωση έχει $n+m$ διακεκριμένες μη μηδενικές λύσεις.

40. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι παρακάτω εξισώσεις:

$$(z+1)^5 + (z-1)^5 = 0, \qquad z^3 = 8(1-z)^3, \qquad z^7 + z^{-7} = 0.$$

41. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $z = 3+i$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6 = 64$.

42. Αν z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 είναι οι ρίζες της $z^5 = 1$, αποδείξτε ότι:
(α) $(2z_0 + 2z_1 + 4z_2 + 2z_3 + 2z_4)^5 = 32$.
(β) $(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_4) = 5$.
(γ) Να γραφεί ως γινόμενο δευτεροβαθμίων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές το $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

43. Να αναλύσετε το $P(z) = z^4 + 1$ σε γινόμενο δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές.