Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)

Συναρτήσεις – Ασκήσεις

1. Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού:

$$h(x) = \ln x, \qquad \alpha(v) = -v, \qquad j(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \qquad g(u) = \ln(\ln(\cos u)).$$

2. Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού:

$$V(t) = \ln(1 - t^2), \qquad y = \ln(\sin^2 x), \qquad \rho = \sqrt{(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)}.$$

3. Προσδιορίστε την εικόνα για τις ακόλουθες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(α) $f(x) = x^3$.

(β) $f(x) = x - 4$.

(γ) $f(x) = e^x + 3$.

(δ) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

4. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις της Άσκησης 3 εξετάστε αν (σαν συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$) είναι: (α) $1-1$, (β) επί, (γ) $1-1$ και επί.

5. Προσδιορίστε την εικόνα για τις ακόλουθες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(α) $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^2 + \cos x$.

(β) $f(x) = |x|$, $g(x) = 1/x$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$.

(γ) $f(x) = x^2 + x - |x|^2$, $g(x) = x^{16} + x$.

6. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις της Άσκησης 5 εξετάστε αν (σαν συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$) είναι: (α) $1-1$, (β) επί, (γ) $1-1$ και επί.

7. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που να είναι:

(α) $1-1$ αλλά όχι επί.

(β) επί αλλά όχι $1-1$.

(γ) $1-1$ και επί.

(δ) ούτε $1-1$ ούτε επί.

8. Έστω S το σύνολο των δίσκων στο επίπεδο και έστω $f : S \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) =$το εμβαδόν του x. Εξετάστε αν (α) η f είναι ένα προς ένα, (β) η f είναι επί.

9. Έστω T το σύνολο των κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων στο επίπεδο και έστω $g : T \to \mathbb{R}^+$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $g(x) =$το μήκος της περιφέρειας του x. Εξετάστε αν (α) η g είναι ένα προς ένα, (β) η g είναι επί.

10. Αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{a, b, c\}$, πόσες διαφορετικές συναρτήσεις υπάρχουν από το A στο B; Πόσες από το B στο A; Σε κάθε περίπτωση, πόσες από αυτές είναι $1-1$ και πόσες από αυτές είναι επί; Πόσες είναι $1-1$ και επί;

11. Έστω A ένα σύνολο με m στοιχεία και B ένα σύνολο με n στοιχεία ($m, n \in \mathbb{N}$). Να βρεθεί το πλήθος των συναρτήσεων από το A στο B.

12. Αν $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση από το A στο B και ότι δεν υπάρχει συνάρτηση από το B στο A. Υπάρχει συνάρτηση από το $\emptyset$ στο $\emptyset$;

13. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ορίζονται ως εξής:

(α) $f(n) = n + 1$.

(β) $g(n) = 2n$.

(γ) $h(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1 & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$

Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$ και $(f \circ g) \circ h$.

14. Δίνονται συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί.

(β) Αν η $g \circ f$ είναι $1-1$, τότε η f είναι $1-1$.

Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων f και g που να δείχνουν ότι δεν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές: μπορεί η g να είναι επί ενώ η $g \circ f$ όχι, μπορεί η f να είναι $1-1$ αλλά η $g \circ f$ όχι.

15. Αν οι $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι $1-1$ και επί, δείξτε ότι η $g \circ f : A \to C$ είναι $1-1$ και επί.

16. Αν $f : A \to B$ είναι συνάρτηση, $U, V \subseteq A$ και $X, Y \subseteq B$, δείξτε ότι:

(α) $f(\emptyset) = \emptyset, \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \qquad f^{-1}(B) = A.$

(β) $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$.

(γ) Αν η f είναι $1-1$, τότε $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$.

(δ) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

(ε) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

(στ) $f^{-1}(B \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X)$.

17. Για τις παρακάτω συναρτήσεις ελέγξτε αν υπάρχει δεξιό αντίστροφο ή/και αριστερό αντίστροφο. Αν υπάρχει, βρείτε το.

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 4x + 2.$

(β) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad g(x) = x^2.$

18. Για τις συναρτήσεις f και g της Άσκησης 17 βρείτε τα σύνολα $f([-1,1])$, $f^{-1}([0,2])$, $g([-3,-2])$ και $g^{-1}([2,4])$.

19. Βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f(x,y)=\frac{x^2+3xy}{(x-1)y}.$$

20. Βρείτε την ένωση και την τομή των παρακάτω οικογενειών συνόλων με σύνολο δεικτών A.

(α) $A=\{1,2,3,\dots,n\}$, $\qquad S_a=[0,a+1]$.

(β) $A=\mathbb{N}$, $\qquad S_a=\left(0,\frac{1}{n}\right)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1/n\}$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(x+1)^2$.

(α) Σχεδιάστε το γράφημα της f.

(β) Προσδιορίστε τα σύνολα $B=f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([-1,4])$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}([-2,0))$.

(γ) Βρείτε δύο διαφορετικά δεξιά αντίστροφα της $f:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$.

(δ) Βρείτε δύο υποσύνολα A_1 και A_2 του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A_1\cup A_2=\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ να είναι ένα προς ένα. Βρείτε ένα αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_i}:A_i\to\mathbb{R}$, $i=1,2$.

22. Ορίζουμε τις παρακάτω διμελείς πράξεις στο $\mathbb{Z}$:

(α) $x\circ y=x-y$.

(β) $x\circ y=|x-y|$.

(γ) $x\circ y=x+y+xy$.

(δ) $x\circ y=\frac{1}{2}\left(x+y+\frac{1}{2}((-1)^{x+y}+1)+1\right)$.

Επαληθεύστε ότι είναι διμελείς πράξεις στο $\mathbb{Z}$, δηλαδή συναρτήσεις από το $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}$. Σε κάθε περίπτωση, ελέγξτε αν η πράξη είναι μεταθετική και προσεταιριστική.

23. Μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται φθίνουσα αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$A_{n+1}\subseteq A_n.$$

(α) Αποδείξτε ότι αν η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, τότε για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n.$$

(β) Αποδείξτε ότι αν οι $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσες, τότε

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n\right).$$

24. Έστω $f : X \to Y$ και έστω $(A_t)_{t\in T}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι:

$$f\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \bigcup_{t\in T} f(A_t) \quad \text{και} \quad f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \subseteq \bigcap_{t\in T} f(A_t).$$

Αν η f είναι ένα προς ένα, δείξτε ότι

$$f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) = \bigcap_{t\in T} f(A_t).$$