

Ασκήσεις 1

Αλγεβρική Τοπολογία

1. Δείξτε ότι το γράφημα μίας συνεχούς συνάρτησης $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $(0, 1)$.

2. Δείξτε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του επιπέδου είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους:

- Το επίπεδο \mathbb{R}^2 .
- Το ανοιχτό τετράγωνο: $(0, 1) \times (0, 1)$.
- Η λωρίδα $\{(x, y) : 0 < y < 1\}$.
- Το ανοιχτό τεταρτημόριο: $\{(x, y) : x, y > 0\}$.
- Το εσωτερικό ενός τριγώνου.

3. Δείξτε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του επιπέδου είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους:

- Το επίπεδο πλην ένα σημείο $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
- Το επίπεδο πλην ένα δίσκο $\mathbb{R}^2 - D^2$.
- Το επίπεδο πλην ένα τετράγωνο $\mathbb{R}^2 - I^2$.

4. Έστω D_1, \dots, D_n ζένοι κλειστοί δίσκοι στο επίπεδο. Δείξτε ότι το $\mathbb{R}^2 - (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n)$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$.

5*. Βρείτε δύο ομοιομορφικούς χώρους X, Y και μία 1-1, επί και συνεχή απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ που δεν είναι ομοιομορφισμός.

6*. Βρείτε δύο τοπολογικούς χώρους X, Y για τους οποίους υπάρχουν συνεχείς, 1-1 και επί απεικονίσεις: $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ αλλά οι X, Y δεν είναι ομοιομορφικοί.

7. Δείξτε ότι ο χώρος I^2 / \sim όπου $(0, t) \sim (1, t), t \in I$, είναι ομοιομορφικός με τον $S^1 \times I$.

8. Δείξτε ότι ο χώρος I^2 / \sim όπου $(0, t) \sim (1, t), (t, 0) \sim (t, 1) t \in I$, είναι ομοιομορφικός με τον $S^1 \times S^1$.

9. Δείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $S^1 / z \sim -z$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο S^1 .

10*. Έστω $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ μία άπειρη φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνεκτικών συνόλων στο επίπεδο. Είναι η τομή $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ συνεκτικό σύνολο;

Οι περισσότερες ασκήσεις είναι από τα κεφάλαια 10,21 του βιβλίου *Elementary Topology* : <http://www.pdmi.ras.ru/olegviro/topoman/e-unstable.html> όπου μπορείτε να βρείτε και τις λύσεις.