Ασκήσεις 5

Αλγεβρική Τοπολογία

1. Έστω $p : \tilde{X} \to X$ απεικόνιση επικάλυψης. Έστω $A \subset X$ με την επαγόμενη τοπολογία απ΄ τον X. Αν $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ δείξτε ότι η απεικόνιση p περιορισμένη στο $\tilde{A}$ είναι απεικόνιση επικάλυψης (όπου η τοπολογία στο $\tilde{A}$ επάγεται απ΄ τον $\tilde{X}$).

2. Έστω $p : \tilde{X} \to X$ απεικόνιση επικάλυψης τέτοια ώστε το $p^{-1}(x)$ είναι μη κενό και πεπερασμένο για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι ο $\tilde{X}$ είναι $Hausdorff$ και συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι $Hausdorff$ και συμπαγής

3. Κατασκευάστε τον καθολικό χώρο επικάλυψης του $X = S^2 \vee S^1$.

4. Έστω X συνεκτικός κατά τόξα και τοπικά συνεκτικός κατά τόξα τοπολογικός χώρος με $\pi_1(X)$ πεπερασμένη. Δείξτε ότι κάθε απεικόνιση $f : X \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

Υποδ. Θεωρείστε την ανύψωση της f στο $\mathbb{R}$.

5. Περιγράψτε όλους τους συνεκτικούς χώρους επικάλυψης του κυλίνδρου. Περιγράψτε όλους τους συνεκτικούς χώρους επικάλυψης του *torus*.

6. Υπάρχει μη τετριμμένη απεικόνιση επικάλυψης $f : P^2 \to P^2$;