Εξεταστική Περίοδος Ιουνίου 2008

Αλγεβρική Τοπολογία

Απαντήστε σε όλα τα θέματα

Θέμα 1. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : D^2 \to D^2$ έχει σταθερό σημείο (Θ. *Brouwer*)

Θέμα 2. Υποθέτουμε ότι για τον τοπολογικό χώρο X υπάρχει συστολή παραμόρφωσης σε σημείο $r : X \times I \to X$, $r(x, 1) = x_0$, $\forall x \in X$. Δείξτε ότι ο X είναι συνεκτικός κατά τόξα. Δείξτε ότι αν ο Y είναι τυχαίος τοπολογικός χώρος οι Y και $X \times Y$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Θέμα 3. α) Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του $X = S^1 \vee S^1$ (δηλαδή ο X είναι ο χώρος που παίρνουμε ταυτίζοντας δύο κύκλους σε ένα σημείο).

β) Έστω $X = \mathbb{R}^2/\{x_1 \sim x_2 \sim x_3\}$. Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του X.

γ) Έστω X ο χώρος που παίρνουμε ταυτίζοντας τα άκρα του $[0, 1]$ με δύο σημεία του *torus*. Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του X.

Θέμα 4. Έστω $f : P^2 \to S^1$ συνεχής απεικόνιση, όπου P^2 είναι το προβολικό επίπεδο. Δείξτε ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

Θέμα 5. Έστω X ο χώρος που παίρνουμε ταυτίζοντας το βόρειο και νότιο πόλο της S^2. Περιγράψτε τον καθολικό χώρο επικάλυψης του X.