Προετοιμασία για το διαγωνισμό SEEMOUS 2010

(A)

1. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $[0,\infty)$ με τις εξής ιδιότητες: (α) $s=\sup A<1$ και (β) αν $x,y\in A$ και $x<y$ τότε $\frac{x}{y}\in A$. Δείξτε ότι $s\in A$.

2. Δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $a,b,c>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό πολύγωνο P στο $\mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-d(x,P)}dx = a+bA(P)+cL(P),$$

όπου $d(x,P)=\min\{\|x-y\|_2 : y\in P\}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του x από το P, $A(P)$ είναι το εμβαδόν του P και $L(P)$ είναι η περίμετρος του P.

3. Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f'(x)=\frac{x^2-f^2(x)}{x^2(f^2(x)+1)},\quad \text{για κάθε } x>1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

4. Έστω $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ ένας $n\times n$ πίνακας που ικανοποιεί τα εξής:

1. Αν $i\neq j$ τότε $a_{ij}>0$.
2. Για κάθε $i\leq n$, $a_{ii}=0$.
3. Για κάθε $i\leq n$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}\leq 1$.

Τότε, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$ του $\{1,\dots,n\}$ ώστε: για κάθε $l\leq k$ και για κάθε $i\in\sigma_l$,

$$\sum_{j\in\sigma_l} a_{ij}\leq\frac{2}{k}.$$

(B)

1. Έστω $n\geq 3$ και $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $p_1,\dots,p_n$ είναι κορυφές κανονικού n–γώνου στο $\mathbb{R}^2$ τότε

$$f(p_1)+\cdots+f(p_n)=0.$$

Δείξτε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

2. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $n\in\mathbb{N}$ και $A_1,\dots,A_n$ είναι υποσύνολα του $\{1,\dots,n\}$ ώστε «για κάθε $i\neq j$, το $A_i\cap A_j$ έχει το πολύ 10 στοιχεία», τότε

$$\sum_{j=1}^n \mathrm{card}(A_j)\leq Cn^{3/2}.$$

3. Δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $a,b>0$ ώστε: για κάθε $n\geq 2$,

$$a\log n\leq\sum_{k=1}^\infty\left(1-(1-2^{-k})^n\right)\leq b\log n.$$

4. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι η συνάρτηση

$$F(x)=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

φραγμένη;

(Γ)

1. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \ldots, I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1, \ldots, \ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1}, I_{i_2} και I_{i_3}. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \ldots, I_m$.

2. Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = +\infty.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $t > 0$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(kt) = +\infty.$$

3. Έστω $0 < r < 1$ και $z_1, \ldots, z_n \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Δείξτε ότι υπάρχει $z_0 \in D$ ώστε

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + z_k) = (1 + z_0)^n.$$

4. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x)\, dx}{\int_0^1 x^n dx}$$

υπάρχει. Ποιά είναι η τιμή του;

(Δ)

1. Έστω $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ ένα προς ένα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $\alpha > 0$ ώστε

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq C\|x - y\|_2^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}^2$. Δείξτε ότι $\alpha \geq \frac{2}{3}$.

2. Δίνονται n σημεία $x_1, \ldots, x_n$ στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχει ζεύγος κάθετων ευθειών $\ell_1 \perp \ell_2$ ώστε καθένα από τα τέσσερα κλειστά τεταρτημόρια στα οποία χωρίζουν το επίπεδο να περιέχει τουλάχιστον $[n/4]$ από τα σημεία x_i.

3. Έστω $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|\langle x, y_j \rangle|^2}{\sum_{k=1}^{n} |\langle y_j, y_k \rangle|} \leq \langle x, x \rangle.$$

4. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[k\sqrt{2}]}}{k}.$$

Υποδείξεις για κάποια από τα προβλήματα

Α4. Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ένας $n \times n$ πίνακας που ικανοποιεί τα εξής:

1. Αν $i \neq j$ τότε $a_{ij} > 0$.
2. Για κάθε $i \leq n$, $a_{ii} = 0$.
3. Για κάθε $i \leq n$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$.

Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ του $\{1, \ldots, n\}$ ώστε: για κάθε $l \leq k$ και για κάθε $i \in \sigma_l$,

$$\sum_{j \in \sigma_l} a_{ij} \leq \frac{2}{k}.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $i \leq n$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Τότε, ο A έχει ιδιοτιμή την $\rho = 1$ με δεξιό ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Άρα, υπάρχει μη μηδενικό $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ με $\gamma A = \gamma$.

Ισχυρισμός. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\gamma_i > 0$ για κάθε $i \leq n$.

Απόδειξη. Από την $\gamma A = \gamma$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ij} = \gamma_j \tag{1}$$

για κάθε $j \leq n$. Έπεται ότι

$$\sum_{j=1}^n |\gamma_j| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\gamma_i| a_{ij} = \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|.$$

Αφού έχουμε παντού ισότητα, τα γ_j είναι ομόσημα. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\gamma_j \geq 0$ για κάθε $j \leq n$. Επιστρέφουμε στην (1): αφού $a_{ij} > 0$ αν $i \neq j$, από την $\gamma_j = 0$ θα καταλήγαμε στην $\gamma = 0$. □

Θεωρούμε $k \geq 2$ και για κάθε διαμέριση $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ του $\{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε

$$f(\Delta) = \sum_{l=1}^k \sum_{i,j \in \delta_l} \gamma_i a_{ij}. \tag{2}$$

Υπάρχει διαμέριση $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ για την οποία η ποσότητα $f(\cdot)$ ελαχιστοποιείται. Θα δείξουμε ότι η Σ ικανοποιεί το ζητούμενο:

Ισχυρισμός. Για κάθε $l \leq k$ και για κάθε $i \in \sigma_l$ έχουμε $\sum_{j \in \sigma_l} a_{ij} \leq \frac{2}{k}$.

Απόδειξη. Αν όχι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υπάρχει $r \in \sigma_1$ ώστε

$$\theta := \sum_{j \in \sigma_1} a_{rj} > \frac{2}{k}. \tag{3}$$

Ορίζουμε $(k-1)$ το πλήθος νέες διαμερίσεις $\Sigma^2, \ldots, \Sigma^k$ ως εξής: για κάθε $s = 2, \ldots, k$ παίρνουμε $\Sigma^s = \{\sigma_1^s, \ldots, \sigma_k^s\}$ όπου

$$\sigma_1^s = \sigma_1 \setminus \{r\}, \ \ \sigma_s^s = \sigma_s \cup \{r\} \ \text{ και } \ \sigma_l^s = \sigma_l \ \text{ αν } \ l \neq 1, s.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(\Sigma) - f(\Sigma^s) &= \sum_{i,j \in \sigma_1} \gamma_i a_{ij} + \sum_{i,j \in \sigma_s} \gamma_i a_{ij} - \sum_{i,j \in \sigma_1 \setminus \{r\}} \gamma_i a_{ij} - \sum_{i,j \in \sigma_s \cup \{r\}} \gamma_i a_{ij} \\ &= \gamma_r \sum_{j \in \sigma_1} a_{rj} + \sum_{i \in \sigma_1} \gamma_i a_{ir} - \gamma_r \sum_{j \in \sigma_s} a_{rj} - \sum_{i \in \sigma_s} \gamma_i a_{ir}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας για $s = 2, \ldots, k$ – και παίρνοντας υπόψιν τις (3) και (1) – έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{k} \Big(f(\Sigma) - f(\Sigma^s)\Big) &= (k-1)\gamma_r \sum_{j\in\sigma_1} a_{rj} + (k-1)\sum_{i\in\sigma_1}\gamma_i a_{ir} - \gamma_r \sum_{j\notin\sigma_1} a_{rj} - \sum_{i\notin\sigma_1}\gamma_i a_{ir} \\
&\geq (k-1)\gamma_r \sum_{j\in\sigma_1} a_{rj} - \gamma_r \sum_{j\notin\sigma_1} a_{rj} - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i a_{ir} \\
&= (k-1)\gamma_r\theta - \gamma_r(1-\theta) - \gamma_r \\
&= \gamma_r(k\theta - 2) > 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχει $s \in \{2, \ldots, k\}$ ώστε $f(\Sigma) > f(\Sigma^s)$. □

B4. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι η συνάρτηση $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$ φραγμένη;

Υπόδειξη. Θέτουμε $f_k(x) = \frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$ και $\phi_k(x) = f_k'(x) = \frac{1}{k^2}\cos\left(\frac{x}{k}\right)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\|\phi_k\|_\infty = \sup\{|\phi_k(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{k^2}.$$

Από το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\left(\frac{x}{k}\right)$$

είναι συνεχής.

Η Φ είναι *σχεδόν περιοδική*: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $S = S(\varepsilon) > 0$ ώστε, σε κάθε διάστημα μήκους S υπάρχει t με την ιδιότητα

$$\sup\{|\Phi(x+t) - \Phi(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \varepsilon.$$

Πράγματι, αν επιλέξουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\Phi - \sum_{k=1}^{N}\phi_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ και αν πάρουμε S μεγαλύτερο από την μικρότερη θετική περίοδο t_N της $\Phi_N = \sum_{k=1}^{N}\phi_k$ (παρατηρήστε ότι αυτή είναι περιοδική) τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\Phi(x+t_N) - \Phi(x)| &\leq |\Phi(x+t_N) - \Phi_N(x+t_N)| + |\Phi_N(x+t_N) - \Phi_N(x)| + |\Phi_N(x) - \Phi(x)| \\
&\leq 2\|\Phi - \Phi_N\|_\infty < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ στην Φ έπεται ότι

$$F(y) = \int_0^y \Phi(x)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Αφού η Φ είναι σχεδόν περιοδική, αν υποθέσουμε ότι η F είναι φραγμένη μπορούμε να ελέγξουμε (άσκηση) ότι η F είναι επίσης σχεδόν περιοδική και ικανοποιεί την

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\int_0^M F(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\frac{1}{M}\int_0^M F(x)\,dx = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{M}{k}\right) = \frac{2}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\sin^2\frac{M}{2k}.$$

Αν επιλέξουμε $M = n\pi$, χρησιμοποιώντας την $\sin x \geq 2x/\pi$ για $0 < x < \pi/2$, βλέπουμε ότι

$$\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin^2\frac{n\pi}{2k} \geq \frac{2}{n\pi}\sum_{k=n+1}^{2n}\sin^2\frac{n\pi}{2k} \geq \frac{2}{n\pi}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n^2}{k^2} \geq \frac{1}{2\pi}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Γ1. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1,\ldots,I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1,\ldots,\ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1,i_2,i_3\in\{1,\ldots,m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1}, I_{i_2} και I_{i_3}. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα $I_1,\ldots,I_m$.

Θα χρειαστείτε το **θεώρημα του Helly**: Έστω $m\geq n+1$ και $\{A_1,\ldots,A_m\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε $n+1$ από τα A_i έχουν μη κενή τομή: αν $i_1,\ldots,i_{n+1}$ είναι δείκτες από το $\{1,\ldots,m\}$, τότε

$$A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{n+1}}\neq\emptyset. \tag{1}$$

Τότε, η τομή όλων των A_i είναι μη κενή:

$$A_1\cap\cdots\cap A_m\neq\emptyset. \tag{2}$$

Μια απόδειξη μπορεί να δοθεί μέσω του ακόλουθου θεωρήματος του Radon: Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που έχει τουλάχιστον $n+2$ σημεία. Τότε, υπάρχουν ξένα υποσύνολα R και B του S ώστε $S=R\cup B$ και

$$\mathrm{conv}(R)\cap\mathrm{conv}(B)\neq\emptyset. \tag{3}$$

Απόδειξη του θεωρήματος του Radon. Από την υπόθεση υπάρχουν $m\geq n+2$ και σημεία $v_1,\ldots,v_m\in S$ τα οποία είναι διαφορετικά ανά δύο. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}\gamma_1+\cdots+\gamma_m &= 0\\ \gamma_1v_1+\cdots+\gamma_mv_m &= 0\end{aligned}$$

με αγνώστους τους $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$. Αφού το πλήθος $m\geq n+2$ των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος $n+1$ των εξισώσεων, υπάρχει μη τετριμμένη λύση του συστήματος. Ορίζουμε

$$R=\{v_i:\gamma_i>0\}\quad\text{και}\quad B=\{v_i:\gamma_i\leq 0\}. \tag{4}$$

Από τον ορισμό των R και B έχουμε $R\cap B=\emptyset$.

Θέτουμε $\beta=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_i>0$. Αφού $\gamma_1+\cdots+\gamma_m=0$, έχουμε

$$\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}(-\gamma_i)=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_i=\beta. \tag{5}$$

Από την $\gamma_1v_1+\cdots+\gamma_mv_m=0$ παίρνουμε

$$\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\gamma_iv_i=\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}(-\gamma_i)v_i. \tag{6}$$

Διαιρούμε με β και ορίζουμε

$$v=\sum_{\{i:\gamma_i>0\}}\frac{\gamma_i}{\beta}v_i=\sum_{\{i:\gamma_i\leq 0\}}\frac{-\gamma_i}{\beta}v_i. \tag{7}$$

Από την (5) είναι φανερό ότι το v είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του R και, ταυτόχρονα, κυρτός συνδυασμός σημείων του B. Δηλαδή, $v\in\mathrm{conv}(R)\cap\mathrm{conv}(B)$. □

Απόδειξη του θεωρήματος του Helly. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το πλήθος m των συνόλων. Αν $m=n+1$ τότε το συμπέρασμα συμπίπτει με την υπόθεση.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m>n+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $i=1,\ldots,m$, η τομή $A_1\cap\cdots\cap A_{i-1}\cap A_{i+1}\cap\cdots\cap A_m$ είναι μη κενή. [Πράγματι, η οικογένεια $\{A_j:j\neq i\}$ ικανοποιεί την (1) και αποτελείται από λιγότερα από m σύνολα.] Μπορούμε λοιπόν, για κάθε $i=1,\ldots,m$, να βρούμε

$$p_i\in A_1\cap\cdots\cap A_{i-1}\cap A_{i+1}\cap\cdots\cap A_m. \tag{8}$$

Έτσι, έχουμε $m>n+1$ σημεία $p_1,\ldots,p_m$ με την ιδιότητα: το p_i ανήκει σε όλα τα σύνολα A_j εκτός ίσως από το A_i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Υπάρχουν δείκτες $i\neq s$ ώστε $p_i=p_s=p$ (δύο από τα p_i συμπίπτουν). Τότε, το p ανήκει σε όλα τα A_j: αφού $p=p_i$, το p ανήκει σε όλα τα A_j εκτός ίσως από το A_i, αφού όμως $p=p_s$, το p ανήκει και στο A_i. Έπεται ότι

$$p\in A_1\cap\cdots\cap A_m, \tag{9}$$

δηλαδή ισχύει η (2).

(β) Τα $p_1, \ldots, p_m$ είναι διαφορετικά ανά δύο. Αφού $m \geq n+2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Radon. Υπάρχουν $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ με $I \cap J = \emptyset$ ώστε αν θέσουμε $R = \{p_i : i \in I\}$ και $B = \{p_j : j \in J\}$ τότε υπάρχει κάποιο σημείο

$$q \in \mathrm{conv}(R) \cap \mathrm{conv}(B). \tag{10}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το q ανήκει σε όλα τα A_i. Πράγματι, από τον τρόπο επιλογής των p_i έχουμε

$$R \subset \bigcap \{A_s : s \notin I\}. \tag{11}$$

Το σύνολο δεξιά είναι κυρτό, ως τομή κυρτών συνόλων, άρα

$$\mathrm{conv}(R) \subset \bigcap \{A_s : s \notin I\}. \tag{12}$$

Όμοια,

$$\mathrm{conv}(B) \subset \bigcap \{A_s : s \notin J\}. \tag{13}$$

Αφού $q \in \mathrm{conv}(R) \cap \mathrm{conv}(B)$, συμπεραίνουμε ότι

$$q \in \bigcap \{A_s : s \notin I\} \quad \text{και} \quad q \in \bigcap \{A_s : s \notin J\}. \tag{14}$$

Αφού $I \cap J = \emptyset$, για κάθε $s \in \{1, \ldots, m\}$ έχουμε «είτε $s \notin I$ ή $s \notin J$». Από την (14) έπεται ότι $q \in A_1 \cap \cdots \cap A_m$, άρα $A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset$. □

Γ2. Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = +\infty.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $t > 0$ ώστε

$$\sum_{k=1}^\infty f(kt) = +\infty.$$

Ίσως χρειαστείτε το **θεώρημα του Baire**. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται *κλειστό* αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.

Ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Baire: Έστω X κλειστό διάστημα (δηλαδή, σύνολο της μορφής $[a, b]$ ή $[a, \infty)$ ή $(-\infty, b]$ ή ολόκληρο το $\mathbb{R}$). Αν το X γράφεται σαν ένωση $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ μιας ακολουθίας κλειστών συνόλων τότε τουλάχιστον ένα από τα F_n περιέχει ανοικτό διάστημα (γ, δ).

Δ4. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{[k\sqrt{2}]}}{k}.$$

Υπόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{[k\sqrt{2}]}}{k}$ συγκλίνει. Αν θέσουμε $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{[k\sqrt{2}]}$ τότε,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}(-1)^{[k\sqrt{2}]}k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) s_k + \frac{s_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}.$$

Αποδεικνύεται ότι

$$|s_k| \leq a + b \log k$$

όπου a, b θετικές σταθερές. Τότε, $\frac{s_n}{n} \to 0$ και η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{s_k}{k(k+1)}$ συγκλίνει απολύτως, οπότε η (A_n) συγκλίνει.

Άνω φράγμα για την $|s_n|$. Θέτουμε t_n το πλήθος των $1 \leq k \leq n$ για τους οποίους ο $[k\sqrt{2}]$ είναι άρτιος. Τότε,

$$s_n = 2t_n - n.$$

Παρατηρούμε ότι: ο $[k\sqrt{2}]$ είναι άρτιος αν και μόνο αν $0 < \left\{\frac{k\sqrt{2}}{2}\right\} < \frac{1}{2}$, όπου $\{x\} = x - [x]$ είναι το κλασματικό μέρος του x. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στο ερώτημα: πόσο καλά είναι κατανεμημένη η ακολουθία $\{n\alpha\}$ στο $(0, 1)$, στην ειδική περίπτωση $\alpha = \sqrt{2}/2$ (λεπτομέρειες στο forum.math.uoa.gr προσεχώς).

Προβλήματα Απειροστικού Λογισμού

1. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[k\sqrt{2}]}}{k}.$$

2. Εξετάστε για ποιές τιμές του $s>0$ συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k^s}.$$

3. Έστω $\phi(x)=d(x,\mathbb{Z})$, η αποσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Να υπολογιστεί το
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\phi^2(2^kx)}{2^k}.$$

4. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, όπου
$$a_k=\int_1^{\infty}\exp\left(-x^{n^2}\right)\,dx.$$

5. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, όπου
$$a_k=\int_0^1\cos(nt^2)\,dt.$$

6. Έστω (a_k) η ακολουθία των θετικών ριζών της εξίσωσης $\tan x=x$. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}=\frac{1}{10}.$$

7. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με
$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$
είναι φθίνουσα και βρείτε το $\lim_{x\to 0^+}F(x)$.

8. Έστω $A,B\subset\mathbb{N}$ με την ιδιότητα $\sum_{k\in A}\frac{1}{k}<+\infty$ και $\sum_{k\in B}\frac{1}{k}<+\infty$. Είναι σωστό ότι $\sum_{k\in A+B}\frac{1}{k}<+\infty$; (όπου $A+B=\{a+b:a\in,b\in B\}$).

9. Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$
συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι η συνάρτηση
$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$
φραγμένη;

10. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (t_n) θετικών πραγματικών αριθμών με $t_n\to+\infty$ ισχύει
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\sum_{k=1}^{n}t_ka_k=0.$$

11. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικός $x_n>0$ ώστε $(x_n-1)\ln x_n=n$.
(β) Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\ln n}{n}$.

12. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to a$$

και

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \to a^2.$$

Δείξτε ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin x_k \to \sin a.$$

13. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

14. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n} + \{\sqrt{n}\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου $\{x\} = x - [x]$ είναι το κλασματικό μέρος του x. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

15. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \sqrt[n]{e^{x^2}}\, dx \right)^n.$$

16. Έστω $d(n)$ το πλήθος των διαιρετών του φυσικού αριθμού n. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} < 4.$$

17. Εξετάστε αν $\lim_{n\to\infty} |n \sin n| = +\infty$.

18. Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ο αριθμός

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

είναι άρρητος.

19. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(1 - \max_{1\leq k\leq n} \{\sqrt{n}\} \right).$$

20. Έστω (x_n) όχι σταθερή ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν

$$\liminf_{n\to\infty} \left(x_1 + \cdots + x_n - n\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \right) > 0.$$

21. Εξετάστε αν ισχύει το εξής: μια ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} \left(\limsup_{k\to\infty} |x_n - x_k| \right) = 0.$$

22. Έστω $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{a_k a_j}{a_k^2 + a_j^2} \geq 0.$$

23. Θέτουμε $a_0 = a_1 = 1$ και $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι: για κάθε περιττό $k \in \mathbb{N}$, ο k είναι διαιρέτης του $a_k - 1$.

24. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία η ακολουθία $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Δείξτε ότι, για κάθε $s > 1$, η ακολουθία

$$\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n} k^{s-1} a_k$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

25. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε b_n να είναι το πλήθος των $k \in \mathbb{N}$ για τους οποίους $a_k \geq \frac{1}{n}$. Να δειχτεί ότι τουλάχιστον μία από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ αποκλίνει.

26. Έστω $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$(F(t) - F(s))(G(t) - G(s)) \geq 0$$

για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν αύξουσες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και συνάρτηση $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $F = f \circ z$ και $G = g \circ z$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \geq 3$ προσδιορίστε την ποσότητα

$$M_n = \sup\left\{\min_{1\leq i<j\leq n} f(|x_i - x_j|) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}.$$

28. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int_0^x f^2(t)\, dt = 1.$$

Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{3x} f(x) = 1$.

29. Να βρεθεί το

$$\sup \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\sin(2\pi x_k)}{\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)^2}$$

πάνω από όλους τους $n \geq 1$ και όλες τις διαμερίσεις $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ του $[0, 1]$.

30. Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ φθίνουσα συνάρτηση με

$$\int_1^{\infty} xf(x)\, dx < \infty.$$

Να δειχτεί ότι

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\, dx < \infty.$$

31. Συγκρίνετε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 x^x\, dx \text{ και } \int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy} dx\, dy.$$

32. Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(-1) = f(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [-1, 1]$ ώστε $f(\xi) = (1 + \xi^2)f'(\xi)$.

33. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = n^{\sin x} + n^{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε: (α) η f_n έχει ολικό μέγιστο στο x_n, και (β) $x_n \to 0$.

34. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση, $2k$ φορές παραγωγίσιμη. Ορίζουμε $g(x) = f(\sqrt{x})$, $x \geq 0$. Δείξτε ότι η g είναι k φορές παραγωγίσιμη στο 0 και εκφράστε την $g^{(k)}(0)$ συναρτήσει των παραγώγων της f στο 0.

35. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\lim_{h\to 0}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)|\right) = 0.$$

Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής;

36. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Δείξτε ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)\}=1$, όπου $\{t\}=t-[t]$.

37. Έστω $x_0<x_1<\cdots<x_n$ και $y_0<y_1<\cdots<y_n$ στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση P ώστε: (α) $P(x_i)=y_i$, $i=0,1,\ldots,n$, και (β) η P είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,x_n]$.

38. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\frac{2}{5}\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{2}{3}\int_0^{3/5} f(x)\,dx\geq\int_0^{4/5} f(x)\,dx.$$

39. Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{N}$ ώστε η ισότητα $f(x,y)=f(y,z)$ να ισχύει αν και μόνο αν $x=y=z$;

40. Να λυθεί η εξίσωση

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^2+\cdots+\sqrt{x^n}}}}=2.$$