

**Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών
φοιτητών
20 Μαρτίου 2021**

Πρόβλημα 1: Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοια ώστε $a_{ij} = 1$ για $i \geq j$ και $0 \leq a_{ij} \leq 1$ για $i < j$. Δείξτε ότι $0 \leq \det(A) \leq 1$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Δείξτε ότι

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2)f(x)$$

για $|x| < 1$.

Πρόβλημα 3: Για θετικούς ακεραίους n, r ορίζουμε τα $a_{n,r,k} \in \mathbb{N}$ από την ισότητα

$$(1+x+x^2+\dots+x^{r-1})^n = \sum_{k \geq 0} a_{n,r,k} x^k,$$

όπου $a_{n,r,k} = 0$ για $k > (r-1)n$ και $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, ή με άλλο τρόπο, δείξτε ότι

$$\sum_{q \in \mathbb{N}} a_{n,r,qr+i} = r^{n-1}$$

για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$.

Πρόβλημα 4: Έστω διπλά συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \alpha$ για κάθε $x \geq 0$ και

$$\int_0^{\infty} |f''(t)| dt < \infty,$$

δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^{2021}} dt < \infty.$$

Πρόβλημα 5: Δίνονται οι ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών που ορίζονται αναδρομικά από τις ισότητες $a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 a_{n-2}$ και $b_n = b_{n-1} + (n-1)^2 b_{n-2}$ για $n \geq 2$ και τις αρχικές συνθήκες $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = 0$ και $b_1 = 1$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Έστω ότι ο πίνακας A είναι $n \times n$, όπου $n \geq 2$. Αφαιρώντας την τελευταία γραμμή του A από καθεμιά από τις υπόλοιπες γραμμές και αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει ως προς την πρώτη στήλη καταλήγουμε (εξηγήστε πώς) στον τύπο $\det(A) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - a_{i,i+1})$, από όπου το ζητούμενο είναι φανερό.

Πρόβλημα 2: Από τη βασική ταυτότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ παίρνουμε

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\log(1-x)}{x}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{g(x) + g(-x)}{2} = \frac{1}{2x} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

από όπου εύκολα προκύπτει η ζητούμενη συναρτησιακή εξίσωση για την $f(x)$.

Πρόβλημα 3: Θέτουμε $\sigma_{n,r}(i) := \sum_{q \in \mathbb{N}} a_{n,r,qr+i}$ για $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ και θεωρούμε την πρωταρχική r -στή ρίζα της μονάδος ζ . Θέτοντας $x = \zeta^j$ στην ταυτότητα που ορίζει τα $a_{n,r,k}$ βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sigma_{n,r}(i) \zeta^{ij} = \begin{cases} r^n, & \text{αν } j = 0, \\ 0, & \text{αν } j \in \{1, 2, \dots, r-1\}. \end{cases}$$

Θεωρούμε τις εξισώσεις αυτές ως ένα σύστημα r γραμμικών εξισώσεων στους r αγνώστους $\sigma_{n,r}(i)$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική ορίζουσα Vandermonde και συνεπώς μοναδική λύση. Αφού η $\sigma_{n,r}(i) = r^{n-1}$ για $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ είναι μια λύση (εξηγήστε γιατί), έπεται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4: Παρατηρούμε ότι για $x, y \geq 0$

$$|f'(x) - f'(y)| = \left| \int_x^y f''(t) dt \right| \leq \int_x^y |f''(t)| dt.$$

Από αυτό, την υπόθεση ότι $\int_0^{\infty} |f''(t)| dt < \infty$ και το κριτήριο του Cauchy έπεται ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ και συνεπώς ότι η f' είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$. Αφού η $1/f$ είναι επίσης φραγμένη σε αυτό το διάστημα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^2} dt < \infty.$$

Πράγματι, για $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^2} dt &= \int_0^y \left(\frac{(f'(t))^2 - f(t)f''(t)}{(f(t))^2} + \frac{f''(t)}{f(t)} \right) dt \\ &= \int_0^y \left(-\frac{f'(t)}{f(t)} \right)' dt + \int_0^y \frac{f''(t)}{f(t)} dt \\ &= \frac{f'(0)}{f(0)} - \frac{f'(y)}{f(y)} + \int_0^y \frac{f''(t)}{f(t)} dt. \end{aligned}$$

Αφού οι f' και $1/f$ είναι φραγμένες στο $[0, \infty)$ και $\int_0^\infty |f''(t)| dt < \infty$, έπεται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 5: Παρατηρούμε ότι η ισότητα $a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 a_{n-2}$ γράφεται ισοδύναμα

$$a_n - na_{n-1} = -(n-1)(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}).$$

Από αυτήν, με επαγωγή στο n προκύπτει ότι

$$a_n - na_{n-1} = (a_1 - a_0)(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^n(n-1)!$$

για κάθε $n \geq 1$. Ομοίως, αφού $b_1 - b_0 = 0$, βρίσκουμε ότι $b_n - nb_{n-1} = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και συνεπώς ότι $b_n = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, για $n \geq 1$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{na_{n-1} + (-1)^n(n-1)!}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n},$$

από όπου έπεται ότι

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι το άπειρο άθροισμα $1 - \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}/n = 1 - (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots) = 1 - \log(2)$.