Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

27 Ιανουαρίου 2018

Πρόβλημα 1: Υπολογίστε το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right),$$

όπου $a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ για $n\in\mathbb{N}$.

Πρόβλημα 2: Έστω $\Gamma(x):=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{x-1}\,\mathrm{d}u$ για $x>0$. Δείξτε ότι ο πραγματικός αριθμός

$$\frac{2^{2p+1}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+2\right)}$$

είναι ακέραιος για κάθε $p\in\mathbb{N}$. Δίνεται ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Πρόβλημα 3: Έστω $X(m,n)$ το σύνολο των απεικονίσεων $f:\{1,2,\ldots,m\}\to\{1,2,\ldots,n\}$. Δύο απεικονίσεις $f,g\in X(m,n)$ θα λέγονται συμβατές αν ισχύει $f(x)=g(x)$ για ένα τουλάχιστο $x\in\{1,2,\ldots,m\}$. Πόσες το πολύ απεικονίσεις στο $X(m,n)$ μπορούμε να επιλέξουμε, έτσι ώστε οποιεσδήποτε δύο από αυτές να είναι συμβατές;

Πρόβλημα 4:

(α) Υπάρχει συνεχής, αύξουσα συνάρτηση $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\int_0^x f(t)^2dt \;\geq\; \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$$

για κάθε $x>0$;

(β) Υπάρχει συνεχής, αύξουσα συνάρτηση $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\int_0^x f(t)^2dt \;\geq\; \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^{2{,}001}$$

για κάθε $x>0$;

Πρόβλημα 5: Ένας πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ θα λέγεται καλός αν κάθε πίνακας $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $X=Y+Z$, όπου $Y,Z\in\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι πίνακες με $AY=YA$ και $AZ=-ZA$. Δείξτε ότι ο A είναι καλός αν και μόνο αν $A^2=\lambda I_n$ για κάποιο μη μηδενικό $\lambda\in\mathbb{C}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Δείχνουμε πρώτα ότι $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 2$. Παρατηρούμε έπειτα ότι

$$\prod_{n=1}^{m} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \prod_{n=1}^{m} \frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)}{a_n a_{n+1}} = \prod_{n=1}^{m} \frac{a_{n-1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_0 a_{m+2}}{a_m a_2}$$

και συμπεραίνουμε ότι το όριο για $m \to \infty$ είναι ίσο με $a_0/a_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = (3+\sqrt{5})/3$.

Πρόβλημα 2: Πρώτα δείχνουμε με ολοκλήρωση κατά μέρη ότι $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ για $x > 0$. Κατόπιν, βρίσκουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2p+1}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+2)} &= \frac{2^{2p+1}}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{(p+1)!} \prod_{k=1}^{p} \left(p - \frac{2k-1}{2} \right) \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \\
&= 2^p \, \frac{\prod_{k=1}^{p} (2p-2k+1)}{(p+1)!} \\
&= 2^p \, \frac{\prod_{k=1}^{p} (2p-2k+1)}{(p+1)!} \cdot \frac{\prod_{k=2}^{p} (2p-2k+2)}{\prod_{k=2}^{p} (2p-2k+2)} \\
&= 2^p \, \frac{(2p-1)!}{(p+1)! 2^{p-1} \prod_{k=2}^{p} (p-k+1)} \\
&= \frac{2(2p-1)!}{(p+1)!(p-1)!} = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \\
&= \binom{2p}{p} - \binom{2p}{p-1},
\end{aligned}$$

το οποίο είναι ακέραιος (ο p-στός αριθμός Catalan) για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

Πρόβλημα 3: Το ζητούμενο μέγιστο είναι ίσο με n^{m-1}. Πράγματι, οι απεικονίσεις $f \in X(m,n)$ με $f(1) = 1$ είναι n^{m-1} σε πλήθος και ανά δύο συμβατές. Έστω τυχαίο υποσύνολο S του $X(m,n)$, οποιαδήποτε δύο από τα στοιχεία του οποίου είναι συμβατά. Για $f, g \in X(m,n)$, γράφουμε $f \sim g$ αν υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε να ισχύει $g(x) \equiv f(x) + k \pmod{n}$ για κάθε $x \in [m]$. Τότε, η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $X(m,n)$, κάθε κλάση ισοδυναμίας της οποίας έχει ακριβώς n στοιχεία, τα οποία μάλιστα είναι ανά δύο μη συμβατά. Κατά συνέπεια, η $\sim$ έχει ακριβώς $n^m/n = n^{m-1}$ κλάσεις ισοδυναμίας και το S περιέχει το πολύ ένα στοιχείο από καθεμιά. Άρα, το πλήθος των στοιχείων του S δεν υπερβαίνει το n^{m-1}.

Πρόβλημα 4: Για το (α), δείχνουμε π.χ. ότι η $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ με $f(x) = e^{2x}$ για $x \geq 0$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Η απάντηση στο ερώτημα (β) είναι αρνητική. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Τότε, θέτοντας $\delta = 10^{-3}$,

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt \right)^{2+\delta} \leq \int_0^x f(t)^2 dt \leq f(x) \cdot \int_0^x f(t)\,dt$$

και συνεπώς

$$f(x) \geq \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)^{1+\delta}$$

για $x > 0$. Άρα, για τη συνάρτηση $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ με $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ για $x \geq 0$ ισχύει $F'(x) \geq F(x)^{1+\delta}$ ή, ισοδύναμα, $(F(x)^{-\delta})' \leq -\delta$, για $x > 0$. Προφανώς, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση που να παίρνει θετικές τιμές για όλα τα $x > 0$.

Πρόβλημα 5: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $A^2 = \lambda I_n$ με $\lambda \neq 0$. Έστω ότι για τους πίνακες $X, Y, Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχουμε $X = Y + Z$, με $AY = YA$ και $AZ = -ZA$. Τότε $AX = AY + AZ$ και $XA = YA + ZA = AY - AZ$, οπότε $AY = (AX + XA)/2$ και $AZ = (AX - XA)/2$. Από τις ισότητες αυτές παίρνουμε

$$Y \;=\; \frac{X + A^{-1}XA}{2}, \qquad Z \;=\; \frac{X - A^{-1}XA}{2} \tag{1}$$

και συμπεραίνουμε ότι για δοσμένο $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, οι πίνακες Y, Z όπως παραπάνω είναι μοναδικοί. Αντιστρόφως, για τυχαίο $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ορίζοντας τους Y, Z από τις (1) έχουμε, λόγω της υπόθεσης $A^2 = \lambda I_n$, ότι $AY = YA = (AX + XA)/2$ και $AZ = -ZA = (AX - XA)/2$ και, προφανώς, $Y + Z = X$. Έπεται ότι ο A είναι καλός.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο A είναι καλός και θεωρούμε $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε, υπάρχουν $Y, Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοια ώστε $X = Y + Z$, $AY = YA$ και $AZ = -ZA$. Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι $AY = YA = (AX + XA)/2$. Πολλαπλασιάζοντας τις ισότητες $AY = (AX + XA)/2$ και $YA = (AX + XA)/2$ από δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα, με A και αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε ότι $A^2X = XA^2$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, πρέπει να έχουμε $A^2 = \lambda I_n$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Μένει να αποκλείσουμε την περίπτωση $\lambda = 0$. Πράγματι, έστω ότι $A^2 = O$. Τότε, ο A μετατίθεται και αντιμετατίθεται, ταυτόχρονα, με τον ευατό του και το μηδενικό πίνακα και συνεπώς οι παραστάσεις $A = A + O$ και $A = O + A$ δείχνουν ότι ο A δεν είναι καλός, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας, εκτός κι αν $A = O$, περίπτωση που επίσης αποκλείεται για προφανείς λόγους.