Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

23 Φεβρουαρίου 2008

Πρόβλημα 1: (α) Δίνεται ένα σύνολο X και 2008 12-μελή υποσύνολά του, τα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2008}$. Αποδείξτε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε κάποια από τα στοιχεία του X άσπρα και τα υπόλοιπα μαύρα, έτσι ώστε όλα τα υποσύνολα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2008}$ να μην είναι μονοχρωματικά (δηλαδή κάθε υποσύνολο από τα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2008}$ να περιέχει τουλάχιστον 1 άσπρο στοιχείο και τουλάχιστον 1 μαύρο στοιχείο).

(β) Αποδείξτε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε κάποια από τα στοιχεία του $Y = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ άσπρα και τα υπόλοιπα μαύρα, ώστε το πλήθος των μονοχρωματικών 11-μελών υποσυνόλων του Y να είναι λιγότερο από $\binom{2008}{11} 2^{-10}$.

Πρόβλημα 2: Για κάθε $y \in \mathbb{Z}^2$ και $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ ορίζουμε το άθροισμα $y + X = \{y + x : x \in X\}$. Έστω A, B δυο πεπερασμένα ισοπληθικά υποσύνολα του $\mathbb{Z}^2$ και $T \subseteq \mathbb{Z}^2$ τέτοια ώστε

- Τα σύνολα $A + t$, $t \in T$, είναι ανά δύο ξένα,
- Τα σύνολα $B + t$, $t \in T$, είναι ανά δύο ξένα,
- $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{t \in T} A + t$.

Αποδείξτε ότι $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{t \in T} B + t$.

Πρόβλημα 3: (α) Έστω $f(x)$ μονότονη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{f(x) - x}{x^2} dx$$

συγκλίνει, τότε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = 1.$$

(β) Έστω $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\log(1/a_n)}$$

συγκλίνει, τότε και η σειρά

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{\log n}$$

συγκλίνει.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**