Προβλήματα Ανάλυσης: απαντήσεις – υποδείξεις

1. Κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο ακολουθίας αριθμών της μορφής $\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m}$, $m,n=0,1,2,\dots$ (άρα και ο $\sqrt{2}$).

Υπόδειξη. θέτουμε $A=\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m}: n\geq m\geq 0\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το A τέμνει κάθε ανοικτό διάστημα (a,b) όπου $0\leq a<b$. Παρατηρήστε ότι: (α) αν $x\in A$ τότε $kx\in A$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, (β) το A περιέχει οσοδήποτε μικρούς θετικούς αριθμούς, διότι $\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}\to 0$.

2. Σωστό: αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $A=\{m\ln 2+n\ln 3: m,n\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

- Αν $0=m\ln 2+n\ln 3$ για κάποιους $m,n\in\mathbb{Z}$, τότε $m=n=0$.
- Το A δεν έχει ελάχιστο θετικό στοιχείο: έστω ότι έχει, τον $x>0$. Τότε $x\leq\ln 2$, άρα $\ln 2=q_1x+r_1$ με $q_1\in\mathbb{N}$ και $0\leq r_1<x$. Όμως $r_1=\ln 2-q_1x\in A$, οπότε $r_1=0$. Όμοια δείχνουμε ότι ο $\ln 3$ είναι πολλαπλάσιο του x: $\ln 3=q_2x$. Όμως τότε, $0=q_2\ln 2-q_1\ln 3$ και $q_1,q_2\neq 0$ (άτοπο).
- Στο $(0,\ln 2)$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$ του A.
- Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $y\in A$ ώστε $0<y<\varepsilon$ (υπόδειξη: κάθε $x_n-x_{n+1}\in A$).
- Αν $y\in A$, $y>0$ και $k\in\mathbb{N}$, τότε $ky\in A$.
- Σε κάθε διάστημα (a,b), $a\geq 0$, υπάρχει στοιχείο του A.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}^+$ και, λόγω συμμετρίας, στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω $m\in\mathbb{N}$ και έστω $m<r\leq m+1$. Θεωρούμε τον μεγαλύτερο $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ για τον οποίο $m^2+2n^2<r^2$. Τότε, $m^2+2(n+1)^2\geq r^2$. Δηλαδή,

$$\sqrt{m^2+2n^2}<r\leq\sqrt{m^2+2(n+1)^2}.$$

Έπεται ότι

$$G(r)\leq r-\sqrt{m^2+2n^2}\leq\sqrt{m^2+2(n+1)^2}-\sqrt{m^2+2n^2}<\frac{4n+2}{\sqrt{m^2+2n^2}}<\frac{4n+2}{m}.$$

Όμως, $m^2+2n^2<r^2\leq(m+1)^2$. Άρα, $2n^2<2m+1$. Έπεται ότι

$$G(r)<\frac{4\sqrt{m+1/2}+2}{m}.$$

Αφού $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{4\sqrt{m+1/2}+2}{m}=0$, έπεται ότι $\lim\limits_{r\to\infty}G(r)=0$.

4. Έστω $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ το κλασματικό μέρος του x. Για κάθε $i=0,\dots,n$ θέτουμε $s_i=x_1+\cdots+x_i$ (συμφωνούμε ότι $s_0=0$). Έστω $t_0,\dots,t_n$ η αύξουσα αναδιάταξη των $\{s_0\},\dots,\{s_n\}$. Τότε,

$$(t_1-t_0)+\cdots+(t_n-t_{n-1})+(1-t_n)=1$$

και όλες οι διαφορές είναι μη αρνητικές. Άρα υπάρχει $1\leq k\leq n$ ώστε $t_k-t_{k-1}\leq\frac{1}{n+1}$ ή $1-t_n\leq 1$. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν $0\leq i<j\leq n$ ώστε $|\{s_i\}-\{s_j\}|\leq\frac{1}{n+1}$ οπότε θέτουμε $S=\{x_{i+1},\dots,x_j\}$ και $m=\lfloor s_j\rfloor-\lfloor s_i\rfloor$. Στην περίπτωση που $1-t_n\leq\frac{1}{n+1}$, θέτουμε $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ και $m=1+\lfloor s_n\rfloor$.

5. Αν $n=2k$ τότε $f(n)\geq k^2$ (δοκιμάστε $x_1=\cdots=x_k=0$ και $x_{k+1}=\cdots=x_{2k}=1$). Αν $n=2k+1$ τότε $f(n)\geq k(k+1)$ (δοκιμάστε $x_1=\cdots=x_k=0$ και $x_{k+1}=\cdots=x_{2k+1}=1$).

Δείξτε ότι ισχύουν ισότητες ($f(2k)=k^2$ και $f(2k+1)=k(k+1)$) με επαγωγή. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $f(2k)=k^2$ και θεωρούμε $y\leq x_1\leq\cdots\leq x_{2k}\leq z$ στο $[0,1]$. Θέλουμε να φράξουμε το

$$\sum_{1\leq i<j\leq 2k}|x_i-x_j|+(z-y)+\sum_{i=1}^{2k}(x_i-y)+\sum_{i=1}^{2k}(z-x_i)\leq f(2k)+(z-y)+\sum_{i=1}^{2k}(z-y).$$

Αφού $z - y \leq 1$, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει το άνω φράγμα

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

6. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} \frac{a_2}{a_2 + b_2} \cdots \frac{a_n}{a_n + b_n} \right)^{1/n} + \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} \frac{b_2}{a_2 + b_2} \cdots \frac{b_n}{a_n + b_n} \right)^{1/n} \leq 1.$$

Εφαρμόστε την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου.

7. Αρκεί να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln(\sin x) - \ln x$ είναι κοίλη (στη συνέχεια εφαρμόζεται η ανισότητα Jensen). Παρατηρήστε ότι

$$f'(x) = \cot x - \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. Γράφουμε πρώτα

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{x_k - x_j} = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-s} \frac{1}{x_{j+s} - x_j}.$$

Από την ανισότητα αρμονικού–αριθμητικού μέσου,

$$\sum_{j=1}^{n-s} \frac{1}{x_{j+s} - x_j} \geq \frac{(n-s)^2}{\sum_{j=1}^{n-s} (x_{j+s} - x_j)} \geq \frac{(n-s)^2}{2s},$$

διότι

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-s} (x_{j+s} - x_j) &= \sum_{t=s+1}^{n} x_t - \sum_{t=1}^{n-s} x_t \\ &= \left(\sum_{t=1}^{n} x_t - \sum_{t=1}^{s} x_t \right) - \left(\sum_{t=1}^{n} x_t - \sum_{t=n-s+1}^{n} x_t \right) \\ &= \sum_{t=n-s+1}^{n} x_t - \sum_{t=1}^{s} x_t = \sum_{t=1}^{s} (x_{n+1-t} - x_t) \leq 2s. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{x_k - x_j} \geq \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(n-s)^2}{2s} \geq cn^2 \log n.$$

9. Με επαγωγή ως προς τον βαθμό $2k$ του $p(x)$. Δείξτε και χρησιμοποιήστε τα εξής:

- Κάθε μη αρνητικό πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού 2 είναι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πολυωνύμων.
- Κάθε μη αρνητικό πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $2k > 2$ γράφεται στη μορφή $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, όπου $q(x), r(x)$ μη σταθερά και μη αρνητικά πολυώνυμα (με βαθμό μικρότερο από $2k$).
- Αν καθένα από τα πολυώνυμα $q(x), r(x)$ είναι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πολυωνύμων, τότε το ίδιο ισχύει και για το πολυώνυμο $q(x) \cdot r(x)$ (υπόδειξη: ταυτότητα Lagrange).

10. Εξετάστε πρώτα το πλήθος των λύσεων της $f(n) + f(m) = x$, όπου $x > 0$. Έστω $A(x) = \{(n, m) : f(n) + f(m) = x,\ f(n) \leq f(m)\}$. Αν $(n, m) \in A(x)$ τότε $f(m) \geq x/2$. Όμως, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε $f(m) < x/2$ για κάθε $m > M$. Άρα, αν $(n, m) \in A(x)$ τότε $m \leq M$. Για κάθε $m \leq M$ το σύνολο των n που ικανοποιούν την $f(n) + f(m) = x$ είναι επίσης πεπερασμένο διότι: (α) αν $f(m) \geq x$ δεν υπάρχουν τέτοια n και (β) αν $f(m) < x$ τότε υπάρχει $N(m) \in \mathbb{N}$ ώστε $f(n) < x - f(m)$ για $n \geq N(m)$. Έπεται ότι το $A(x)$ είναι πεπερασμένο. Λόγω συμμετρίας, συμπεραίνουμε ότι η $f(n) + f(m) = x$ έχει πεπερασμένες το πλήθος λύσεις.

Το πρόβλημα ζητάει να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(n) + f(m) + f(s) = 1$ έχει πεπερασμένες το πλήθος λύσεις. Βρίσκουμε $K \in \mathbb{N}$ ώστε $f(k) < 1/3$ για κάθε $k > K$. Αν (n, m, s) είναι μια λύση της εξίσωσης, κάποιος από τους n, m, s είναι το πολύ ίσος με K. Δηλαδή, αρκεί να εξετάσουμε το πλήθος των λύσεων (n, m, s) για τις οποίες $n \leq K$ ή $m \leq K$ ή $s \leq K$.

Όμως, για κάθε n (ομοίως, για κάθε m ή s) είδαμε ότι η εξίσωση $f(m) + f(s) = 1 - f(n)$ έχει πεπερασμένες το πλήθος λύσεις (αν $f(n) \geq 1$ δεν έχει καμία). Έπεται το ζητούμενο.

11. Με επαγωγή ως προς το k: Υποθέτουμε πρώτα ότι $k = 1$. Θεωρούμε ανοικτό διάστημα (a, b) με $a > 0$ (αν $b \leq 0$ μπορούμε να πάρουμε $(c, d) = (a, b)$ και αν $a \leq 0 < b$ θεωρούμε $(a_1, b) \subset (a, b)$ με $a_1 > 0$ και δουλεύουμε με αυτό). Αφού $a_n \to 0$, το (a, b) περιέχει πεπερασμένους το πλήθος όρους της (a_n). Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε υποδιάστημα (c, d) το οποίο να μην περιέχει κανέναν από αυτούς.

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τον k. Έστω (a, b) ένα διάστημα και έστω (c, d) υποδιάστημα που είναι ξένο προς το S_k. Θεωρούμε το μέσο m του (c, d). Μπορούμε να βρούμε N ώστε $a_n < m - c$ για κάθε $n > N$. Έστω $x = a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} + a_{n_{k+1}} \in S_{k+1}$. Αν $x \in (m, d)$ τότε $n_{k+1} \leq N$ (αλλιώς θα είχαμε $a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} \in (c, d)$). Μπορούμε όμως να βρούμε $(t, s) \subset (c, m)$ ώστε $\left(\cup_{n=1}^{N} \{y + a_n : y \in S_k\}\right) \cap (t, s) = \emptyset$: υπάρχει $(c_1, m_1) \subset (c - a_1, m - a_1)$ ώστε $S_k \cap (c_1, m_1) = \emptyset$, άρα $(t_1, s_1) \cap \{y + a_1 : y \in S_k\} = \emptyset$, όπου $t_1 = c_1 + a_1$, $s_1 = m + a_1$, και $(t_1, s_1) \subset (c, m)$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $(t_2, s_2) \subset (t_1, s_1)$ ώστε $(t_1, s_1) \cap \{y + a_2 : y \in S_k\} = \emptyset$, και μετά από N βήματα βρίσκουμε $(t, s) = (t_N, s_N) \subset (c, m)$ ώστε $(t, s) \cap \{y + a_n : y \in S_k\} = \emptyset$ για κάθε $n = 1, \ldots, N$.

Με βάση αυτήν την διαδικασία, για το (t, s) ισχύουν οι $(t, s) \subset (a, b)$ και $(t, s) \cap S_{k+1} = \emptyset$.

12. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$a_n \leq a_1 a_{n-1} \leq a_1^2 a_{n-2} \leq \cdots \leq a_1^n,$$

άρα η $b_n := \sqrt[n]{a_n}$ είναι άνω φραγμένη από τον a_1.

Δείχνουμε ότι $\limsup b_n \leq b_k$ για κάθε k: έστω $n > k$. Μπορούμε να γράψουμε $n = qk + r$ με $0 \leq r < k$. Από την υπόθεση έχουμε $a_n \leq (a_k)^q a_r$, απ' όπου έπεται ότι

$$b_n \leq \left(\sqrt[k]{a_k}\right)^{1 - \frac{r}{n}} (a_r)^{\frac{1}{n}} = b_k^{1 - \frac{r}{n}} b_r^{\frac{r}{n}} \leq b_k^{1 - \frac{r}{n}} b_1^{\frac{r}{n}}.$$

Το δεξιό μέλος τείνει στον b_k όταν το $n \to \infty$. Άρα, $\limsup b_n \leq b_k$.

Έπεται ότι $b_n \to b := \inf\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ (εξηγήστε γιατί).

13. Θεωρούμε την κυρτή θήκη S των σημείων (n, a_n) στο επίπεδο. Δηλαδή, S είναι το σύνολο όλων των σημείων (x, y) που γράφονται στη μορφή $c_1(n_1, a_{n_1}) + \cdots + c_k(n_k, a_{n_k})$ για κάποιους $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ και μη αρνητικούς $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ που έχουν άθροισμα 1.

Δείχνουμε επαγωγικά ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες n για τους οποίους το (n, a_n) είναι κορυφή του S, με την εξής έννοια: υπάρχει ℓ με την ιδιότητα

$$a_k < a_n + \ell(k - n)$$

για κάθε $k \geq 1$.

(α) Ο $n = 1$ αντιστοιχεί σε κορυφή: αφού $a_k/k \to 0$, έχουμε $(a_k - a_1)/(k - 1) \to 0$. Άρα, η ακολουθία $\{(a_k - a_1)/(k - 1)\}_{k \geq 2}$ είναι άνω φραγμένη από κάποιον ℓ. Τότε, $a_k \leq a_1 + \ell(k - 1)$ για κάθε $k \geq 1$ και μεγαλώνοντας λίγο τον ℓ μπορούμε να πετύχουμε γνήσια ανισότητα αν $k \neq 1$.

(β) Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι έχουμε βρει μια κορυφή (n, a_n) του S. Γνωρίζουμε ότι $(a_k - a_n)/(k - n) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Άρα, το σύνολο $\{(a_k - a_n)/(k - n) : k > n\}$ έχει μέγιστο στοιχείο ℓ. Έστω r ο μέγιστος φυσικός για τον οποίο $\ell = (a_r - a_n)/(r - n)$. Τότε,

$$a_k < a_r + \ell(k - r)$$

για κάθε $k > r$. Επίσης, αν $n < k \leq r$ έχουμε

$$a_k \leq a_r + \ell(k - r).$$

Εξηγήστε γιατί η τελευταία ανισότητα ισχύει και όταν $1 \leq k \leq n$. Μικραίνοντας λίγο τον ℓ μπορούμε να πετύχουμε γνήσια ανισότητα για κάθε $k \neq r$.

Δείχνουμε τώρα ότι κάθε n που αντιστοιχεί σε κορυφή του S ικανοποιεί το ζητούμενο. Για κάθε τέτοιο n υπάρχει ℓ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$, ισχύουν οι ανισότητες $a_{n+i} < a_n + \ell i$ και $a_{n-i} < a_n - \ell i$, άρα $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$.

14. Έστω $s \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{n} \operatorname{card}(\{k > s : a_k \leq n\}) \geq \frac{b_n - s}{n}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{b_n}{n} \leq \frac{s}{n} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{a_k},$$

και, αφήνοντας το $s \to \infty$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} \leq \lim_{s\to\infty} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ συγκλίνει, έπεται ότι $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$, άρα $b_n/n \to 0$.

15. Υπάρχει $y_0 \in (0, \pi/2)$ με $\sin y_0 = 0.6$ και $\cos y_0 = 0.8$. Τότε, $x_2 = \cos y_0 \cos y_1 - \sin y_0 \sin y_1 = \cos(y_0 + y_1)$ και $y_2 = \cos y_0 \sin y_1 + \sin y_0 \cos y_1 = \sin(y_0 + y_1)$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι $x_{n+1} = \cos(y_0 + y_1 + \cdots + y_n)$ και $y_{n+1} = \sin(y_0 + y_1 + \cdots + y_n)$.

Δείχνουμε με επαγωγή ότι $0 < t_n := y_0 + y_1 + \cdots + y_n < \pi$ για κάθε n (αν $0 < t_n < \pi$ τότε $0 < y_{n+1} = \sin(t_n) = \sin(\pi - t_n) < \pi - t_n$, άρα $0 < t_{n+1} = t_n + y_{n+1} < \pi$). Αυτό δείχνει ότι όλοι οι y_n είναι θετικοί και ότι η $t_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από τον π. Εξηγήστε τώρα διαδοχικά τα εξής: (α) $y_n \to 0$, (β) $t_n \to \pi$, (γ) $x_n \to -1$.

16. Παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2 + (y^2 - 1)}{2}. \tag{1}$$

Αν λοιπόν $|y| > 1$, τότε $a_{n+1} - a_n > (y^2 - 1)/2 > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $a_n \to +\infty$.

Έστω ότι $|y| < 1$. Αν $|x| > 1 + \sqrt{1 - y^2}$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|x| > 1 + (1 - y^2) + \varepsilon$, οπότε

$$(x - 1)^2 \geq (|x| - 1)^2 > 1 - y^2 + \varepsilon^2,$$

και σε συνδυασμό με την (1) βλέπουμε ότι $a_2 - a_1 > \varepsilon^2/2$. Ειδικότερα, $a_2 > a_1 > 1 + (1 - y^2) + \varepsilon$, και επαγωγικά, $a_{n+1} - a_n > \varepsilon^2/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $a_n \to +\infty$.

Τέλος, έστω ότι $|y| < 1$ και $|x| < 1 + \sqrt{1 - y^2}$. Αν $x > 0$ έχουμε $(x - 1)^2 < 1 - y^2$, άρα $0 < a_2 < a_1$. Με επαγωγή βλέπουμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, άρα συγκλίνει. Αν $x < 0$, τότε από τον δεύτερο όρο και πέρα η (a_n) είναι η ίδια με αυτήν που θα παίρναμε αν είχαμε $a_1 = -x$, δηλαδή συγκλίνει.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το D έχει το ίδιο εμβαδόν με το $D_1 = \{(x, y) : |y| < 1, |x| < 1 + \sqrt{1 - y^2}\}$ (ενδεχομένως διαφέρουν στο σύνορο). Ένα απλό σχήμα δείχνει ότι το εμβαδόν του D είναι ίσο με $4 + \pi$.

17. Από το Λήμμα του Kronecker η ακολουθία $a_n = \frac{n}{2\pi} - \lfloor \frac{n}{2\pi} \rfloor$ είναι πυκνή στο $(0, 1)$. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (a_{n_k}) με

$$0 < a_{n_k} = \frac{n_k}{2\pi} - \lfloor \frac{n_k}{2\pi} \rfloor < \frac{1}{12}.$$

Αυτό σημαίνει ότι
$$0 < n_k - 2\pi\lfloor\frac{n_k}{2\pi}\rfloor < \frac{\pi}{6},$$
άρα $0 < \sin n_k < \frac{1}{2}$. Δηλαδή, $n_k(1-\sin n_k) > n_k/2$. Έπεται ότι
$$\limsup_{n\to\infty} n(1-\sin n) = +\infty.$$
Θα δείξουμε ότι $\liminf\limits_{n\to\infty} n(1-\sin n) = 0$. Ο $\pi/2$ είναι άρρητος, οπότε θεωρώντας τα συνεχή του κλάσματα παίρνουμε ρητούς p_n/q_n με (q_n) γνησίως αύξουσα, $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, $(q_n, q_{n+1}) = 1$ και
$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$
Αφού $(q_n, q_{n+1}) = 1$, δεν μπορούμε να έχουμε δύο διαδοχικούς άρτιους q_n. Υπάρχουν λοιπόν γνησίως αύξουσα ακολουθία (q_n) περιττών φυσικών και ακολουθία (p_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε
$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$
Παρατηρούμε ότι αν $q_n \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)$ τότε $3q_n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)$ και
$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{3p_n}{3q_n}\right| < \frac{9}{(3q_n)^2}.$$
Σε συνδυασμό με το προηγούμενο βήμα, μπορούμε τώρα να πούμε ότι υπάρχουν γνησίως αύξουσα ακολουθία (q_n) φυσικών με $q_n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)$ και ακολουθία (p_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε
$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{9}{q_n^2}.$$
Τότε, για κάθε n έχουμε
$$\sin p_n = \cos\left(\frac{q_n\pi}{2} - p_n\right) \geq 1 - \frac{c}{q_n^2} \geq 1 - \frac{c_1}{p_n^2}$$
(εξηγήστε τις ανισότητες), δηλαδή $p_n(1-\sin p_n) \leq C/p_n$. Αφού $p_n \to +\infty$,συμπεραίνουμε ότι
$$\liminf_{n\to\infty} n(1-\sin n) = 0.$$

18. Θέτουμε $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$. Έστω ότι $\ell < 1$. Θεωρούμε $\ell < s < 1$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(n) \leq sn$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$. Το σύνολο $A_n := \{f(m) : n_0 \leq m \leq n\}$ έχει πληθάριθμο $n - n_0 + 1$, άρα $\max A_n > n - n_0$. Από την άλλη πλευρά, $f(m) \leq sm \leq sn$ για κάθε $n_0 \leq m \leq n$, άρα $\max A_n \leq sn$. Αυτό δείχνει ότι $n - n_0 < sn$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $n < n_0/(1-s)$ για κάθε $n \geq n_0$ – Άτοπο, άρα $\ell \geq 1$.

Έστω τώρα ότι $\ell > 1$. Θεωρούμε $1 < b < \ell$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(n) > bn$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$. Θεωρούμε το σύνολο $B_n = \{m \in \mathbb{N} : f(m) \leq bn\}$. Αφού η f είναι επί, ο πληθάριθμος του B_n είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $\lfloor bn\rfloor > bn - 1$. Όμως, αν $m \geq n$ τότε $f(m) > bm \geq bn$, συνεπώς $m \notin B_n$. Άρα, το B_n έχει το πολύ $n-1$ στοιχεία. Δηλαδή, $n > bn$. Άτοπο, άρα $\ell \leq 1$.

19. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια 1-1 συνάρτηση. Ορίζουμε $s_n = f(1) + \cdots + f(n)$, $s_0 = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + s_n \cdot \frac{1}{n^2}.$$
Από το γεγονός ότι η f είναι 1-1 βλέπουμε ότι $s_k = f(1) + \cdots + f(k) \geq 1 + \cdots + k = k(k+1)/2$, άρα
$$s_k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \geq \frac{k(k+1)}{2} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2k(k+1)} > \frac{1}{k+1}.$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \to +\infty$$

Συνεπώς, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2} = +\infty$.

20. Δείξτε πρώτα ότι $a_n \to \infty$ (απλό: από την αναδρομική σχέση, η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και αν συνέκλινε σε κάποιον $x > 0$ θα έπρεπε να ισχύει $x = x + \frac{1}{\sqrt[k]{x}}$, άτοπο).

Θυμηθείτε το Λήμμα του Stolz: Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

Στην περίπτωσή μας,

$$\frac{a_n^{(k+1)/k} - a_n^{(k+1)/k}}{(n+1) - n} = \left(a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} \right)^{(k+1)/k} - a_n^{(k+1)/k}.$$

Αν θέσουμε $t_n = 1/a_n^{(k+1)/k}$ η τελευταία ποσότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{(1+t_n)^{(k+1)/k} - 1}{t_n} \to \frac{k+1}{k}$$

διότι $t_n \to 0$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{(k+1)/k}}{n} = \frac{k+1}{k}, \ \ \text{άρα} \ \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k} = \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}}.$$

21. Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Δείχνουμε πρώτα ότι $s_n \to +\infty$: αν όχι, τότε $s_n \to s > 0$, οπότε $a_n \to 0$ και $a_n s_n \to 0 \cdot s = 0 \neq 1$ (άτοπο). Άρα, $s_n \to +\infty$ και $a_n = (a_n s_n) \cdot \frac{1}{s_n} \to 1 \cdot 0 = 0$.

Θα δείξουμε ότι $\frac{3n}{s_n^3} \to 1$, οπότε $3na_n^3 \to 1$ και αυτό αποδεικνύει ότι $\sqrt[3]{3n} \cdot a_n \to 1$. Χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Stolz: αρκεί να υπολογίσουμε το όριο της

$$\frac{3(n+1) - 3n}{s_{n+1}^3 - s_n^3} = \frac{3}{a_{n+1}(s_{n+1}^2 + s_n s_{n+1} + s_n^2)} = \frac{3}{a_{n+1} s_{n+1}^2} \cdot \frac{1}{1 + b_n + b_n^2},$$

όπου

$$b_n = \frac{s_n}{s_{n+1}} = 1 - \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} \to 1.$$

Αφού $a_{n+1}s_{n+1}^2 \to 1$, βλέπουμε ότι

$$\frac{3}{a_{n+1} s_{n+1}^2} \cdot \frac{1}{1 + b_n + b_n^2} \to \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

22. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \geq a_1.$$

23. Θέτουμε $b_n = a_n^{n/(n+1)}$. Έχουμε $b_n > 2a_n$ αν και μόνο αν $a_n^n > 2^{n+1} a_n^{n+1}$ δηλαδή $a_n < 1/2^{n+1}$. Άρα,

$$b_n \leq 2a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

24. Χωρίζουμε τους φυσικούς ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων στην 3-αδική τους αναπαράσταση. Η αναπαράσταση του n έχει m ψηφία αν και μόνο αν $3^{m-1} \leq n \leq 3^m - 1$. Σε αυτήν την ομάδα, το πλήθος r των μηδενικών παίρνει τιμές από 0 ως $m-1$. Το πλήθος των n που έχουν r μηδενικά ψηφία είναι $2^{m-r}\binom{m-1}{r}$ (το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι μηδενικό και καθένα από τα μη μηδενικά ψηφία μπορεί να είναι ίσο με 1 ή 2).

Μπορούμε τώρα να δώσουμε άνω και κάτω φράγμα για το άθροισμα της m-οστής ομάδας:

$$\sum_{n=3^{m-1}}^{3^m-1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}=\sum_{r=0}^{m-1}2^{m-r}\binom{m-1}{r}\frac{x^r}{n^3}\leq\frac{2}{27^{m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\binom{m-1}{r}x^r2^{m-1-r}=\frac{2(x+2)^{m-1}}{27^{m-1}}$$

και, ανάλογα,

$$\sum_{n=3^{m-1}}^{3^m-1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}\geq\frac{2}{27\cdot 27^{m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\binom{m-1}{r}x^r2^{m-1-r}=\frac{2(x+2)^{m-1}}{27\cdot 27^{m-1}}$$

Έπεται ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{a(n)}}{n^3}\ \text{ συμπεριφέρεται σαν την }\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x+2}{27}\right)^{m-1}.$$

Συνεπώς, συγκλίνει αν και μόνο αν $x+2<27$, δηλαδή, $x<25$.

25. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ συγκλίνει. Έχουμε $a_n=na_s$ αν και μόνο αν $k^{s-1}\leq n\leq k^s-1$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_s}\sum_{n=k^{s-1}}^{k^s-1}\frac{1}{n}.$$

Όμως,

$$\sum_{n=k^{s-1}}^{k^s-1}\frac{1}{n}>\int_{k^{s-1}}^{k^s}\frac{dx}{x}=\ln(k^s)-\ln(k^{s-1})=\ln k,$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\geq(\ln k)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

Έπεται ότι $\ln k\leq 1$, άρα $k<3$.

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση $k=2$. Γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{2^i-1}\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{s=3}^{i}\frac{1}{a_s}\sum_{n=2^{s-1}}^{2^s-1}\frac{1}{n}.$$

Όπως πριν, για κάθε $s\geq 3$ έχουμε

$$\sum_{n=2^{s-1}}^{2^s-1}\frac{1}{n}<\frac{1}{2^{s-1}}-\frac{1}{2^s}+\int_{2^{s-1}}^{2^s}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2^s}+\log 2\leq\frac{1}{8}+\log 2<1.$$

Θέτουμε $c=\frac{1}{8}+\log 2$ και $\lambda=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6(1-c)}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{2^i-1}\frac{1}{a_n}<\lambda$ για κάθε $i\geq 2$. Δείξτε το με επαγωγή: για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι

$$\sum_{n=1}^{2^i-1}\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+c\sum_{s=3}^{i}\frac{1}{a_s}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+c\frac{1}{6(1-c)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6(1-c)}=\lambda$$

από τον ορισμό των c και λ.

Έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $k=2$.

26. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}$ συγκλίνει, η ακολουθία $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\to 0.$$

Παρατηρήστε ότι, προσθέτοντας τις ισότητες

$$\begin{aligned} r_0 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j} + r_n \\ r_1 &= \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j}{j} + r_n \\ \cdots &\ \cdots\ \cdots \\ r_{n-1} &= \sum_{j=n}^{n} \frac{a_j}{j} + r_n \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} = nr_n + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j} = nr_n + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j} \sum_{k=0}^{j-1} 1 = nr_n + (a_1 + \cdots + a_n).$$

Άρα,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = -r_n + \frac{r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1}}{n} \to 0.$$

27. Υποθέτουμε για απλότητα ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και παραγωγίσιμη και ότι η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, τότε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.$$

Έχουμε $h(x) = -f'(x) \geq 0$ στο $[a,b]$, άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$-\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = \int_a^b h(x)G(x)\,dx = G(\xi)\int_a^b h(x)\,dx = G(\xi)(f(a) - f(b)).$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(b)G(b) + G(\xi)(f(a) - f(b)) = f(a)[(1-t)G(\xi) + tG(b)],$$

όπου $t = f(b)/f(a) \in [0,1]$ (αν $f(a)$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, αφού τότε $f \equiv 0$). Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την G βλέπουμε ότι υπάρχει $u \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)G(u) = f(a)\int_a^u g(x)\,dx.$$

Έπεται το ζητούμενο.

28. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$. Ισχύει η ισότητα

$$(*) \qquad f(n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_n^{n+1} (n+1-x)f'(x)\,dx.$$

Έστω $n < m$. Τότε,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right| \leq \left|\int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx\right| + \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx.$$

Εκτιμούμε τα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος ως εξής: αφού $|f'(x)| \leq \frac{3}{2x^{3/2}}$ για $x \geq 1$, έχουμε

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{3}{2x^{3/2}}\,dx \leq \frac{3}{2}\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα δεξιά, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 27:

$$\left|\int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx\right| = 2\left|\int_{\sqrt{n+1}}^{\sqrt{m+1}} \frac{\sin y}{y}\,dy\right| \le \frac{2}{\sqrt{n+1}} \sup \left|\int_{\sqrt{n+1}}^{u} \sin y\,dy\right| \le \frac{4}{\sqrt{n+1}}.$$

Έπεται ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m > n \ge N$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right| < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο Cauchy, η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ συγκλίνει.

29. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$. Μπορείτε να ξεκινήσετε από την $(*)$ του προηγούμενου Προβλήματος: Έστω $n < m$. Τότε,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right| \ge \left|\int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx\right| - \sum_{k=n+1}^{m}\int_{k}^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx.$$

Εκτιμούμε τα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος ως εξής: αφού $|f'(x)| \le \frac{2}{x^2}$ για $x \ge 1$, έχουμε

$$\sum_{k=n+1}^{m}\int_{k}^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx \le \sum_{k=n+1}^{m}\int_{k}^{k+1} \frac{2}{x^2}\,dx \le 2\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{n+1}.$$

Θεωρούμε τώρα $s \in \mathbb{N}$ (αρκετά μεγάλο) και τις διαδοχικές ρίζες $r_s = e^{s\pi+\pi/2}$ και $t_s = e^{s\pi+3\pi/2}$ της f. Αν θέσουμε $n = \lfloor r_s \rfloor$ και $m = \lfloor t_s \rfloor - 1$, τότε

$$\left|\int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx\right| \ge \left|\int_{r_s}^{t_s} f(x)\,dx\right| - 2e^{-s\pi} = 2 - 2e^{-s\pi}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=\lfloor r_s \rfloor+1}^{\lfloor t_s \rfloor -1} f(k) > 2 - 3e^{-s\pi} > 1.$$

Από το κριτήριο Cauchy, η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x}$ αποκλίνει.

30. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n}\sqrt{\frac{m}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται (αν θέσουμε $t = \sqrt{x/m}$) με

$$2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

31. Επιλέγουμε a_1 τον μικρότερο φυσικό με την ιδιότητα $1/a_1 > \xi$. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} = \frac{1}{a_1+1} < \xi.$$

Επιλέγουμε a_2 τον μεγαλύτερο φυσικό με την ιδιότητα

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} < \xi.$$

Εξηγήστε γιατί υπάρχει τέτοιος φυσικός. Γενικά, αν έχουν οριστεί οι $a_1, \ldots, a_{2n}$ παίρνουμε σαν a_{2n+1} τον μεγαλύτερο φυσικό με την ιδιότητα $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{a_1 a_2 \cdots a_k} > \xi$ και αν έχουν οριστεί οι $a_1, \ldots, a_{2n-1}$

παίρνουμε σαν a_{2n} τον μεγαλύτερο φυσικό με την ιδιότητα $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{a_1a_2\cdots a_k} < \xi$. Δείξτε ότι μπορούμε να συνεχίζουμε επ' άπειρον και ότι το άθροισμα της σειράς ισούται με ξ (πού χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι ο ξ είναι άρρητος;). Δείξτε επίσης τη μοναδικότητα της ακολουθίας (a_n).

Παράδειγμα: αν $\xi = 1/\sqrt{2}$ τότε $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$.

32. Υποθέτουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{a}{b}$ με $a, b \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{n_{k+1}}{n_1n_2\cdots n_k} > 3b$ και $\frac{n_{i+1}}{n_i} > 3$ για κάθε $i \geq k$. Τότε έχουμε

$$an_1n_2\cdots n_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{bn_1n_2\cdots n_k}{n_i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{bn_1n_2\cdots n_k}{n_i}.$$

Από τον ορισμό του k έχουμε ότι

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{bn_1n_2\cdots n_k}{n_i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι οι αριθμοί $an_1n_2\cdots n_k$ και $\sum_{i=1}^{k} \frac{bn_1n_2\cdots n_k}{n_i}$ είναι φυσικοί.

33. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt{n_{k+1}}}{n_1n_2\cdots n_k} = +\infty.$$

Αν όχι, θα υπήρχαν $C > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $n_{k+1} \leq (Cn_1\cdots n_k)^2$ για κάθε $k \geq m$. Θέτοντας $A = Cn_1\cdots n_k$, θα παίρναμε $n_{m+t} \leq A^{2^t}$ για κάθε $t \in \mathbb{N}$ ή, ισοδύναμα, $n_k \leq A^{2^{k-m}}$ για κάθε $k > m$. Όμως τότε, $\sqrt[2^k]{n_k} \leq A^{1/2^m}$ για κάθε $k > m$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

(β) Δείχνουμε επίσης ότι υπάρχουν $B > 0$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq \frac{B}{\sqrt{n_{m+1}}}$$

για κάθε $m \geq N$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, παρατηρήστε πρώτα ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n_k > e^k$ για κάθε $k > N$. Τότε, για κάθε $m \geq N$ γράφουμε

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \sum_{k=m+1}^{\log n_{m+1}} \frac{1}{n_k} + \sum_{k>\log n_{m+1}} \frac{1}{n_k}$$

και παρατηρούμε ότι το πρώτο άθροισμα φράσσεται από $\frac{\log n_{m+1}}{n_{m+1}} \leq \frac{B_1}{\sqrt{n_{m+1}}}$ (διότι η $1/n_k$ είναι φθίνουσα και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το n_{m+1} είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\log n_{m+1} < \sqrt{n_{m+1}}$) ενώ το δεύτερο άθροισμα φράσσεται από

$$\sum_{k>\log n_{m+1}} \frac{1}{e^k} < \frac{1}{\sqrt{n_{m+1}}} \sum_{k>\log n_{m+1}} \frac{1}{e^{k/2}} < \frac{B}{\sqrt{n_{m+1}}}$$

διότι $n_{m+1} < e^k < n_k$ αν $k > \log n_{m+1}$.

Υποθέτουμε ότι ο $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ είναι ρητός και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ γράφουμε το μερικό άθροισμα $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n_k}$ σε ανάγωγη μορφή $\frac{p_m}{q_m}$. Τότε, $q_m \leq n_1n_2\cdots n_m$ και από τον δεύτερο ισχυρισμό παίρνουμε

$$0 < |q_mx - p_m| = q_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq \frac{Bn_1\cdots n_m}{\sqrt{n_{m+1}}}$$

για όλους τελικά τους δείκτες m. Από τον πρώτο ισχυρισμό βλέπουμε ότι $\liminf\limits_{m\to\infty} |q_mx - p_m| = 0$. Αυτό δείχνει ότι ο x είναι άρρητος. Αν ήταν ρητός, θα υπήρχε $c > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ με $x \neq p/q$, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q}$ (εξηγήστε γιατί).

34. Χρησιμοποιούμε την τελευταία παρατήρηση της Άσκησης 33. Αν $x \in \mathbb{Q}$, υπάρχει $c > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ με $x \neq p/q$, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q}$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε $p_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k^{n^2 - m^2}}$ και $q_m = k^{m^2}$. Τότε,

$$0 < x - \frac{p_m}{q_m} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{n^2}} = \frac{1}{k^{(m+1)^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(n-1)(2m+n+1)}} \leq \frac{1}{k^{(m+1)^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{k^{2m+1} q_m}.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο x είναι ρητός, έπεται ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε $c \leq \frac{1}{k^{2m+1}}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο αφού $k \geq 2$.

35. Έστω $x \in S$. Γράφουμε τον x σαν ανάγωγο κλάσμα $x = \frac{p}{q}$, όπου $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$f(x) = \frac{p}{q} - \frac{q}{p} = \frac{p^2 - q^2}{pq}.$$

Παρατηρήστε ότι το $\frac{p^2-q^2}{pq}$ είναι ανάγωγο: αν ένας πρώτος r διαιρεί τους $p^2 - q^2$ και pq, τότε διαιρεί τους p^3 και q^3, άρα διαιρεί τους p και q (άτοπο).

Για κάθε ανάγωγο κλάσμα $x = p/q$ ορίζουμε $H(x) = |p| + |q|$. Αν $x \in S$ τότε $H(x) > 2$. Ελέγξτε ότι αν $y = f(x)$ όπου $x = p/q$, τότε

$$H(y) = |p^2 - q^2| + |pq| \geq |p| + |q| + 2 = H(x) + 2.$$

Επαγωγικά βλέπουμε ότι: αν $x \in f^{(n)}(S)$ τότε $H(x) > 2n + 2$. Αν λοιπόν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S)$, τότε $H(x) > 2n + 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο αφού $H(x) < \infty$.

36. Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $A_m = \{x \geq 1 : \text{ για κάθε } n \geq m,\ |f(nx)| \leq \varepsilon\}$. Κάθε A_m είναι κλειστό: αν $x_k \in A_m$ και $x_k \to x$, τότε για κάθε $n \geq m$, από την συνέχεια της f στο nx, $|f(nx)| = \lim_{k\to\infty} |f(nx_k)| \leq \varepsilon$. Άρα, $x \in A_m$.

Παρατηρούμε ότι $[1, \infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \geq 1$. Από την υπόθεση, $f(nx) \to 0$. Άρα, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq m_0$, $|f(nx)| \leq \varepsilon$. Δηλαδή, $x \in A_{m_0}$. Ο $[1, \infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (κλειστό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας). Από το Θεώρημα του Baire, κάποιο A_m έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $[\gamma, \delta] \subseteq A_m$. Τότε:

1. Αν $x \in [\gamma, \delta]$ έχουμε $|f(nx)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq m$. Δηλαδή, $|f(y)| \leq \varepsilon$ για κάθε

$$(*) \qquad y \in [m\gamma, m\delta] \cup [(m+1)\gamma, (m+1)\delta] \cup \ldots$$

2. Υπάρχει $k \geq m$ ώστε, για κάθε $s \geq k$, $s\delta > (s+1)\gamma$ (αρκεί να διαλέξουμε $k > \gamma/(\delta - \gamma)$.) Τότε,

$$[k\gamma, k\delta] \cup [(k+1)\gamma, (k+1)\delta] \cup \ldots = [k\gamma, \infty).$$

Από την $(*)$ έπεται ότι, για κάθε $y \geq k\gamma$, $|f(y)| \leq \varepsilon$.

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $M (= k\gamma) > 0$ ώστε $|f(y)| \leq \varepsilon$ για κάθε $y \geq M$. Άρα, $\lim_{y\to\infty} f(y) = 0$.

37. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι καθεμία από τις f, f', f'', f''' είναι παντού θετική ή παντού αρνητική. Αντικαθιστώντας την f με την $-f$ αν χρειαστεί, υποθέτουμε ότι $f'' > 0$. Αντικαθιστώντας την f με την $g(x) = f(-x)$ αν χρειαστεί, υποθέτουμε ότι $f''' > 0$. Καθεμία από αυτές τις αλλαγές δεν μεταβάλλει το πρόσημο του γινομένου που εξετάζουμε. Δείξτε ότι $f' > 0$ (η f' είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή) και μετά ότι $f > 0$ (με τον ίδιο τρόπο).

38. Έστω $t < 1$. Θεωρούμε την $g(x) = e^{-x} f(x)$. Τότε, $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό δείχνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Ειδικότερα, $g(x) > g(0)$ για κάθε $x > 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $g(x) > e^{-(1-t)x}$ για κάθε $x > M$. Από τον ορισμό της g βλέπουμε τώρα ότι

$$f(x) = e^x g(x) > e^x e^{-(1-t)x} = e^{tx}$$

για κάθε $x > M$.

Αν $t \geq 1$, η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x}$ ικανοποιεί την $f'(x) = e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x} = f(x)$ για κάθε x, όμως $f(x) < e^x \leq e^{tx}$ για κάθε $x \geq 0$.

39. Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις είναι η $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $g^{(2k+1)}(0) = 0$ και $g^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Έστω f μια άλλη τέτοια συνάρτηση. Τότε, η $h - f$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και μηδενίζεται στα σημεία $x = 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$. Έστω ότι υπάρχει ελάχιστος φυσικός k ώστε $h^{(k)}(0) \neq 0$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $h^{(k)}(x) \neq 0$ στο $(0, \varepsilon)$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $1/n < \varepsilon$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Taylor: υπάρχει $0 < \xi < 1/n < \varepsilon$ ώστε

$$0 = h(1/n) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{h^{(s)}(0)}{s!} \frac{1}{n^s} + \frac{h^{(k)}(\xi)}{k!} \frac{1}{n^k} = \frac{h^{(k)}(\xi)}{k!} \frac{1}{n^k}.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $h^{(k)}(\xi) \neq 0$. Συνεπώς, $h^{(k)}(0) = 0$ για κάθε k, το οποίο σημαίνει ότι $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$.

40. Έστω $f(0) = a$ και $g(0) = b$. Θέτοντας $x = y = 0$ στις δύο ισότητες παίρνουμε $a = a^2 - b^2$ και $b = 2ab$. Από την δεύτερη ισότητα έχουμε: είτε $b = 0$ ή $a = 1/2$. Αν όμως $a = 1/2$ τότε η πρώτη ισότητα δίνει $1/4 = -b^2$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $b = 0$ και η πρώτη ισότητα δίνει $a = 0$ ή $a = 1$. Τώρα, θέτοντας $x = 0$ στην δεύτερη ισότητα παίρνουμε $g(y) = ag(y)$ για κάθε y και αφού η g δεν είναι σταθερή πρέπει να ισχύει η $a = 1$ (αλλιώς θα είχαμε $g \equiv 0$).

Χρησιμοποιώντας την παραγωγισιμότητα των f και g, τις $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ και τις δύο ισότητες, δείξτε ότι

$$f'(x) = -g'(0)g(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = g'(0)f(x).$$

Έπεται ότι $(f^2 + g^2)' = 2(ff' + gg') = 0$ για κάθε x, συνεπώς

$$(f(x))^2 + (g(x))^2 = (f(0))^2 + (g(0))^2 = 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

41. Θέτουμε $a_0 = -1$ και $a_1 = 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει τους $a_0, a_1, \ldots, a_n$ έτσι ώστε οι περιττοί a_n να είναι θετικοί, οι άρτιοι αρνητικοί, και το πολυώνυμο $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ έχει ρίζες στα $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Επιλέγουμε $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n < y_n$. Τότε,

$$p_n(y_0) < 0, p_n(y_1) > 0, p_n(y_2) < 0, \ldots.$$

Επιλέγουμε a_{n+1} με $|a_{n+1}|$ αρκετά μικρό ώστε οι $p_{n+1}(y_i)$ να έχουν το ίδιο πρόσημο με τους $p_n(y_i)$. Αν πάρουμε y_{n+1} αρκετά μεγάλο, θα έχουμε $p_{n+1}(y_{n+1})p_{n+1}(y_n) < 0$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, το p_{n+1} έχει $n+1$ διακεκριμένες ρίζες, μία σε κάθε διάστημα (y_i, y_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n$.

42. Γράψτε το ολοκλήρωμα στη μορφή

$$\int_0^a \int_0^{bx/a} e^{b^2x^2} dy\, dx + \int_0^b \int_0^{ay/b} e^{a^2y^2} dx\, dy.$$

Απάντηση: $(e^{a^2b^2} - 1)/(ab)$.

43. Παρατηρήστε πρώτα ότι $f(y) > 0$ για κάθε $0 < y \leq 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(y) = \left(\int_0^y f(x)\, dx\right)^2 - \int_0^y [f(x)]^3 dx.$$

Έχουμε $G(0) = 0$ και

$$G'(y) = 2f(y) \int_0^y f(x)\, dx - [f(y)]^3.$$

Αφού $f(y) > 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$H(y) = 2\int_0^y f(x)\, dx - [f(y)]^2 \geq 0.$$

Από την υπόθεση ($f(0) = 0$) βλέπουμε ότι $H(0) = 0$ και

$$H'(y) = 2f(y)[1 - f'(y)] \geq 0.$$

Έπεται το ζητούμενο. Ισότητα ισχύει για την $f(x) = x$.

44. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $1 \leq a < b$ έχουμε

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right).$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_1^b f(x)\,dx \leq cb^2.$$

Άρα,

$$(b-a)^2 \leq cb^2 \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $a = 2^j$, $b = 2^{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, παίρνουμε

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\,dx \geq \sum_{j=0}^{k-1} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}\,dx \geq \frac{1}{c}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2^{j+1}-2^j)^2}{2^{2(j+1)}} = \frac{k}{4c}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται το ζητούμενο.

45. Υποθέτουμε πρώτα ότι $gg' \geq 0$. Τότε,

$$\int_0^a g(t)g'(t)\,dt = \frac{g^2(a) - g^2(0)}{2} = \frac{g^2(a)}{2}$$

και

$$g^2(a) = \left(\int_0^a g'(t)\cdot 1\right)^2 \leq \left(\int_0^a [g'(t)]^2 dt\right)\left(\int_0^a 1\,dt\right) = a\int_0^a [g'(t)]^2 dt.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε

$$(*) \qquad \int_0^a g(t)g'(t)\,dt \leq \frac{a}{2}\int_0^a [g'(t)]^2 dt.$$

Για την γενική περίπτωση, θεωρούμε την $g(t) = \int_0^t |f'(s)|\,ds$. Παρατηρήστε ότι η g έχει συνεχή παράγωγο και $g' = |f'|$. Επίσης,

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| = \left|\int_0^t f'(s)\,ds\right| \leq \int_0^t |f'(s)|\,ds = g(t)$$

για κάθε $t \in [0, a]$. Άρα, $|ff'| \leq gg'$. Από την $(*)$,

$$(*) \qquad \int_0^a |f(t)f'(t)|\,dt \leq \int_0^a g(t)g'(t)\,dt \leq \frac{a}{2}\int_0^a |g'(t)|^2 dt = \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

46. Η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ ικανοποιεί τις $g(0) = g(1) = 0$, συνεπώς η μέγιστη τιμή της $|g|$ πιάνεται σε κάποιο σημείο $z \in (0,1)$ για το οποίο $g'(z) = f(z) = 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z \leq 1/2$ και $g(z) \geq 0$ (αλλιώς, αντικαθιστούμε την f με την $f_1(x) = f(1-x)$ ή την f με την $-f$ αντίστοιχα).

Θέτουμε $M = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |f'(x)|$. Τότε $f'(x) \geq -M$, άρα $f(x) \leq M(z-x)$ στο $[0, z]$. Συνεπώς,

$$\int_0^z f(x)\,dx \leq \int_0^z M(z-x)\,dx = \frac{Mz^2}{2} \leq \frac{M}{8}.$$

Σημείωση: Ισχύει ισότητα αν θεωρήσουμε την $f(x) = x - 1/2$.

47. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την f' συνεχή και $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Ξεκινώντας από την $f'(x) - f(x) = e^x (f(x)e^{-x})'$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\,dx &= \int_0^1 e^x\,|(f(x)e^{-x})'|\,dx \geq \int_0^1 |(f(x)e^{-x})'|\,dx \\ &\geq \int_0^1 (f(x)e^{-x})'\,dx = \frac{f(1)}{e} - \frac{f(0)}{1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Αυτή είναι η τιμή του infimum: για να το δούμε, σταθεροποιούμε $0 < t < 1/2$ και ορίζουμε συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: $f(x) = e^{x-1}$ στο $[t,1]$ και $f(x) = g(x)$ στο $[0,t]$, όπου g γνησίως αύξουσα συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(0) = 0$, $g(t) = e^{t-1}$ και $g'(t) = e^{t-1}$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $g(x) = \frac{e^{t-1}(t-1)}{t^2}x^2 + \frac{e^{t-1}(2-t)}{t}x$. Τότε,

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\,dx = \int_0^t |g'(x) - g(x)|\,dx + \int_t^1 |f'(x) - f(x)|\,dx = \int_0^t |g'(x) - g(x)|\,dx.$$

Όμως,

$$\int_0^t |g'(x) - g(x)|\,dx \leq \int_0^t (g'(x) + g(x))\,dx = g(t) + \int_0^t g(x)\,dx \leq g(t) + tg(t) = e^{t-1}(1+t).$$

Αφού $\lim_{t\to 0} e^{t-1}(1+t) = 1/e$, συμπεραίνουμε ότι

$$\inf\left\{\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\,dx : \, f \in C\right\} = \frac{1}{e}.$$

48. Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι αν $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} p^{(2k)}(x)$ (το άθροισμα έχει πεπερασμένους το πλήθος όρους) τότε

$$\int_0^a p(x)\sin x\,dx = -f(a)\cos a + f'(a)\sin a + f(0)$$

και

$$\int_0^a p(x)\cos x\,dx = f(a)\sin a + f'(a)\cos a - f'(0).$$

Αν λοιπόν το a μηδενίζει ταυτόχρονα τα δύο ολοκληρώματα, θα πρέπει να ισχύει η

$$f(a) = f(0)\cos a + f'(0)\sin a.$$

Ειδικότερα, $|f(a)| \leq |f(0)| + |f'(0)|$. Αφού η f είναι πολυώνυμο, έπεται ότι $a \in [0,M]$ για κάποια σταθερά $M > 0$. Όμως οι συναρτήσεις $p(x)\sin x$ και $p(x)\cos x$ έχουν πεπερασμένες το πλήθος ρίζες στο $[0,M]$, άρα οι

$$G(a) = \int_0^a p(x)\sin x\,dx, \quad H(a) = \int_0^a p(x)\cos x\,dx$$

έχουν επίσης πεπερασμένες το πλήθος ρίζες στο $[0,M]$, από το θεώρημα Rolle. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Σημείωση: Καθεμία από τις G, H έχει άπειρες το πλήθος ρίζες στο $[0,+\infty)$.

49. Έστω $m = \min(f/g)$ και $s = \min(g/f)$. Λόγω συμμετρίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \leq s$. Υπάρχει $0 \leq x_1 \leq 1$ ώστε $f(x_1) = mg(x_1)$. Τότε, $g(y) \geq sf(y) \geq mf(y)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

$$0 = f(x_1) - mg(x_1) = \int_0^1 (g(y) - mf(y))T(x_1,y)\,dy \geq 0$$

αφού $g - mf \geq 0$ και $T \geq 0$. Δείξαμε ότι

$$\int_0^1 (g(y) - mf(y))T(x_1, y)\, dy = 0.$$

Όμως η $y \mapsto T(x_1, y)$ είναι γνησίως θετική και η $g - mf$ είναι συνεχής. Αναγκαστικά, $g = mf$. Ειδικότερα, $g(x_1) = mf(x_1) = m^2 g(x_1)$, το οποίο δείχνει ότι $m = 1$. Τώρα, η $g = mf$ μας δίνει το ζητούμενο.

50. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ τότε

$$(*) \qquad A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j| - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0.$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς το πλήθος d των διαφορετικών μη μηδενικών τιμών που παίρνουν οι $|x_i|$. Προφανώς, αν $d = 0$ δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα.

Αν $d = 1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 = \cdots = x_k = s > 0$, $x_{k+1} = \cdots = x_{k+m} = -s$, και $x_{k+m+1} = \cdots = x_n = 0$ για κάποιους $k, m \geq 0$ με $k + m > 0$. Τότε,

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{s}{n^2}(2k^2 + 2m^2 + (k + m)(n - k - m)) - \frac{s}{n}(k + m) = \frac{s}{n^2}(k^2 - 2km + m^2) \geq 0.$$

Έστω τώρα ότι $d \geq 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι, για κάποιον $s > 0$ και για κάποιους $k, m \geq 0$ με $k + m > 0$, $x_1 = \cdots = x_k = s$, $x_{k+1} = \cdots = x_{k+m} = -s$, και αν $i > k + m$, είτε $x_i = 0$ ή $|x_i| > s$.

Θεωρούμε την $V(t) := A(t, \cdots, t, -t, \cdots, -t, x_{k+m+1}, \cdots, x_n)$ (k συντεταγμένες ίσες με t και m συντεταγμένες ίσες με $-t$). Η V είναι γραμμική ανάμεσα στο 0 και τον μικρότερο μη μηδενικό $t \in \{|x_{k+m+1}|, \ldots, |x_n|\}$, παίρνει λοιπόν ελάχιστη τιμή σε ένα από αυτά τα δύο σημεία. Μπορούμε λοιπόν να πετύχουμε μικρότερο πλήθος μη μηδενικών τιμών των $|x_i|$ χωρίς να αυξηθεί η A. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι $V(s) \geq 0$.

Έστω τώρα $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Από την $(*)$ για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ έχουμε

$$\frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |f(x_i) + f(x_j)| + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|.$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα στο $[0, 1]^n$ παίρνουμε

$$\frac{n(n-1)}{n^2} \int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\, dy\, dx + \frac{2}{n} \int_0^1 |f(x)|\, dx \geq \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$

δηλαδή

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\, dy\, dx \geq \frac{n-2}{n-1} \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Η ανισότητα προκύπτει αν αφήσουμε το $n \to \infty$.

51. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p(0) \neq 0$. Έστω $z_1, \ldots, z_n$ οι ρίζες του p στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (αν μια ρίζα έχει πολλαπλότητα s την παίρνουμε s φορές). Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{4n}$ και θεωρούμε τους δίσκους $D(z_i, \varepsilon)$. Καθένας από αυτούς τους δίσκους, αν τέμνει το $[-1, 1]$ το τέμνει σε διάστημα μήκους το πολύ ίσου με $\frac{1}{2n}$. Υπάρχει λοιπόν τουλάχιστον ένα διάστημα $I \subset [-1/2, 1/2]$ το οποίο έχει μήκος τουλάχιστον ίσο με $1/(n+1)$ και είναι ξένο προς όλους τους δίσκους $D(z_i, \varepsilon)$. Ειδικότερα, αν $x \in I$ τότε $|x - z_i| \geq \varepsilon$ για κάθε i. Αφού $p(0) = \prod_{i=1}^{n} z_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{-1}^{1} \frac{|p(x)|}{|p(0)|}\, dx \geq \int_I \frac{|p(x)|}{|p(0)|}\, dx = \int_I \prod_{i=1}^{n} \frac{|x - z_i|}{|z_i|}\, dx.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in I$, αν $|z_i| \leq 1$ τότε $\frac{|x - z_i|}{|z_i|} \geq \varepsilon$ ενώ αν $|z_i| > 1$ τότε

$$\frac{|x - z_i|}{|z_i|} = \left|1 - \frac{x}{z_i}\right| \geq 1 - \left|\frac{x}{z_i}\right| \geq 1/2 > \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\int_I \frac{|p(x)|}{|p(0)|}\,dx \geq \frac{\varepsilon^n}{n+1} = \frac{1}{(4n)^n(n+1)}.$$

52. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x)g(nx)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} (f(x)-f(x_i))g(nx)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x_i)g(nx)\,dx\end{aligned}$$

όπου $x_i = (i-1)/n$. Παρατηρούμε ότι: για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f) να βρούμε $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$,

$$\left|\int_{(i-1)/n}^{i/n} (f(x)-f(x_i))g(nx)\,dx\right| \leq \max(|g|)\int_{(i-1)/n}^{i/n} |f(x)-f(x_i)|\,dx \leq \frac{\max(|g|)\cdot\varepsilon}{n},$$

δηλαδή

$$\left|\int_0^1 (f(x)-f(x_i))g(nx)\,dx\right| \leq \max(|g|)\cdot\varepsilon.$$

Από την άλλη πλευρά, με την αλλαγή μεταβλητής $y = nx$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x_i)g(nx)\,dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}\int_{i-1}^{i} g(y)\,dy = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right).$$

Αφού

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n} \to \int_0^1 f(x)\,dx,$$

έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x_i)g(nx)\,dx \to \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποδείξτε το ζητούμενο.

53. Ορίζουμε $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Αφού η g είναι συνεχής και παίρνει γνησίως θετικές τιμές, η G είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα με $G(0) = 0$ και $G(1) = 1$. Συνεπώς, ορίζεται η $G^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ και είναι συνεχής.

Θεωρούμε το μοναδικό $a \in (0,1)$ για το οποίο $G(a) = 1/2$ και ορίζουμε $L : [0,a] \to \mathbb{R}$ με $L(x) = G^{-1}\left(G(x) + \frac{1}{2}\right)$. Η L είναι συνεχής και $\int_x^{L(x)} g(t)\,dt = 1/2$ για κάθε $x \in [0,a]$. Επίσης, $L(0) = a$ και $L(a) = 1$.

Ορίζουμε $H(x) = \int_x^{L(x)} f(t)\,dt$ για $x \in [0,a]$. Από την συνέχεια της H, την $H(0) + H(a) = \int_0^a f + \int_a^1 f = \int_0^1 f = 1$ και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in [0,a]$ ώστε $H(x_0) = 1/2$. Αν θέσουμε $c = x_0$ και $d = L(x_0)$ βλέπουμε ότι

$$\int_c^d g(t)\,dt = \int_c^d f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

57. Γράφουμε $z_j = |z_j|e^{i\phi_j}$, $0 \leq \phi_j < 2\pi$ και, για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ ορίζουμε

$$A(\theta) = \{j : \cos(\theta - \phi_j) \geq 0\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in A(\theta)} z_j\right| &= \left|\sum_{j\in A(\theta)} z_j e^{-i\theta}\right| \geq \left|\sum_{j\in A(\theta)} \mathrm{Re}(z_j e^{-i\theta})\right| \\ &= \left|\sum_{j\in A(\theta)} |z_j|\cos(\theta-\phi_j)\right| = \sum_{j\in A(\theta)} |z_j|\cos(\theta-\phi_j).\end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j\in A(\theta)} z_j\right| d\theta &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j\in A(\theta)}|z_j|\cos(\theta-\phi_j)\,d\theta\\ &= \sum_{j=1}^n \frac{|z_j|}{2\pi}\int_{\phi_j-\pi/2}^{\phi_j+\pi/2}\cos(\theta-\phi_j)\,d\theta = \sum_{j=1}^n\frac{|z_j|}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^n |z_j|.\end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχει $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ ώστε

$$\left|\sum_{j\in A(\theta_0)} z_j\right| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^n |z_j|.$$

Θέτοντας $I = A(\theta_0)$ παίρνουμε την ανισότητα (η σταθερά $1/\pi$ είναι βέλτιστη: δοκιμάστε τους $z_j = e^{i2\pi j/n}$, $j = 1, \ldots, n$ για n μεγάλο).

58. Θέτουμε $\omega = e^{2in\theta}$. Οι $a_1, \ldots, a_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο και ικανοποιούν την

$$Q(x) = (1+ix)^n - \omega(1-ix)^n = 0$$

διότι $1 + i\tan\phi = e^{2i\phi}(1 - i\tan\phi)$. Το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό n και έχει ρίζες τους a_i. Συνεπώς, αν το γράψουμε στη μορφή $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$, θα έχουμε

$$a_1 + \cdots + a_n = -b_{n-1}/b_n \quad \text{και} \quad a_1\cdots a_n = -b_0/b_n.$$

Έπεται ότι

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1\cdots a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_0} = ni^{n-1} = \pm n$$

(το πρόσημο είναι $+$ αν $n = 4s+1$ και $-$ αν $n = 4s+3$).