Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 3

Επιλέξτε 7 ασκήσεις
(Παράδοση: 19 Δεκεμβρίου 2008)

1. Αν $f \in L^1(m)$ και $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, τότε η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ και $g_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ δείξτε ότι οι ακολουθίες (f_n) και (g_n) συγκλίνουν κατά μέτρο, αλλά όχι ως προς την $\|\cdot\|_1$.

3. Δείξτε ότι η συνεπαγωγή

$$f_n \to f \text{ σχ. παντού } \Rightarrow \ f_n \to f \text{ κατά μέτρο}$$

δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. [Υπόδειξη: Θεωρείστε την ακολουθία (f_n) όπου $f_n = \chi_{[n,\infty)}$.]

4. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g$, $g \in L^1$, και $f_n \to f$ κατά μέτρο. Δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και ότι $f_n \to f$ στον L^1.

5. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $f_n \to f$ κατά μέτρο.

6. Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές $E \subset [a,b]$ που ικανοποιεί τα εξής: $m([a,b]\setminus E) < \varepsilon$ και η $f|_E$ είναι συνεχής. (Αυτό είναι το Θεώρημα του Lusin. Για να το αποδείξετε, χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Egoroff και την πυκνότητα του χώρου των συνεχών συναρτήσεων στον L^1).

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f(x)\cos(nx)dm(x) \to 0 \quad \text{όταν} \quad n \to \infty.$$

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι $\displaystyle\int f(x)dm(x) = \int f(x+t)dm(x)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int |f(x) - f(x+t)|\, dm(x) = 0.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που η f είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-A, A]$, όπου $A > 0$.]

9. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Αν οι $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην f σχεδόν παντού.

10. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και έστω $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $f \in L^1(\mu)$ ισχύει $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) = 0.$$

11. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.

12. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και f, g μη αρνητικές Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο E. Δείξτε ότι

$$\int_E f \cdot g \, dm = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{x\in E : g(x) \geq y\}} f(x)dm(x) \right) dm(y).$$