Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 2

Επιλέξτε 7 ασκήσεις

(Παράδοση: 19 Νοεμβρίου 2008)

1. Αν δ_0 είναι το μέτρο Dirac στο 0, βρείτε την συνάρτηση κατανομής του. Γενικότερα, αν $x_1 < x_2 < \ldots$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a_n > 0$, βρείτε τη συνάρτηση κατανομής του μέτρου Borel $\mu \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$.

2. Αν $\mathcal{E} = \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$, δείξτε ότι $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

3. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}$, $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}$, και η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη στο Y.

4. Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in X : \text{ υπάρχει το } \lim_n f_n(x)\}$ είναι μετρήσιμο.

5. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη.

6. Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, δείξτε ότι η $f + ig : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν οι f και g είναι μετρήσιμες.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

8. Έστω (f_n) μια ακολουθία στον $\mathcal{L}^+(X, \mathcal{M})$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, και ότι

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu < +\infty.$$

Δείξτε ότι $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

9. Έστω $f \in \mathcal{L}^+(X, \mathcal{M})$. Ορίζουμε $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το λ είναι μέτρο, και ότι

$$\int g d\lambda = \int f g d\mu$$

για κάθε $g \in \mathcal{L}^+(X, \mathcal{M})$ [Υπόδειξη: θεωρήστε πρώτα την περίπτωση που η g είναι απλή.]

10. Έστω $f \in \mathcal{L}^+(X, \mathcal{M})$ με $\int f d\mu < +\infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\mu(E) < \infty$ και $\int_E f d\mu > \left(\int f d\mu\right) - \varepsilon$.

11. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ με $\mu(A) = \sharp A$. Να δειχθεί ότι[1]

1. στην ειδική περίπτωση $X = \mathbb{N}$, για κάθε $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ έχουμε

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

2. αν $f : X \to [0, +\infty]$ τότε

$$\int f d\mu = \sup\{\sum_{x \in A} f(x) : A \subseteq X \text{πεπερασμένο}\}$$

12. Αν $f_n, g_n, f, g \in L^1(X, \mu)$, $f_n \to f$ σχεδόν παντού, $g_n \to g$ σχεδόν παντού, $|f_n| \leq g_n$ και $\int g_n \to \int g$, τότε

$$\int f_n \to \int f.$$

[*Υπόδειξη:* Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.]

13. Υποθέτουμε ότι $f_n, f \in L^1(X, \mu)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Τότε,

$$\int |f_n - f| \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n| \to \int |f|.$$

---

[1] ευχαριστώ, Κ.Λ.