Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 1

Επιλέξτε 7 ασκήσεις
(Παράδοση: 27 Οκτωβρίου 2008)

1. Έστω $\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{N} : E \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{N} \setminus E \text{ πεπερασμένο}\}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα στο $\mathbb{N}$, αλλά δεν είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{N}$.

2. Έστω $\mathcal{M}$ μια σ-άλγεβρα στο X που έχει άπειρα στοιχεία. Δείξτε ότι:
(α) Η $\mathcal{M}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.
(β) Η $\mathcal{M}$ έχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία.

3. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $(E_n)_n$ είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{M}$, ορίζουμε

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n, \qquad \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

(α) Δείξτε ότι $\limsup E_n = \{x \in X : x \in E_n \text{ για άπειρα } n\}$,
$\liminf E_n = \{x \in X : x \in E_n \text{ για όλα εκτός από πεπερασμένα } n\}$.

(β) Δείξτε ότι $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$. Επίσης, αν $\mu\big(\bigcup_n E_n\big) < \infty$, τότε $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$.

4. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και (E_j) μια ακολουθία στην $\mathcal{M}$ με την ιδιότητα $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$. Δείξτε ότι $\mu\big(\limsup_j E_j\big) = 0$.

5. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Δείξτε τα εξής.

(α) Για κάθε $E \subseteq X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $E \subseteq A$ και $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(E) < \infty$, τότε το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο, τότε στο (β) δεν χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(E) < \infty$.

6. Έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται στο X από το **πεπερασμένο** προμέτρο μ_0. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο $\mu_*(E)$ του E από τη σχέση

$$\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

Δείξτε ότι το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

7. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση. Αν μ_F είναι το αντίστοιχο Borel μέτρο, δείξτε ότι: για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_F([a,b)) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a,b]) = F(b) - F(a-)$, και $\mu_F((a,b)) = F(b-) - F(a)$.

8. Αν μ είναι μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu((a,b]) < \infty$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \leq b$ τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mu((x,0]), & x < 0 \end{cases}$$

είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής και $\mu_F = \mu$.

9. Κάθε μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu((a,b]) < \infty$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \leq b$ ικανοποιεί, για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n)) : \ E \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n) \right\}.$$

[Υπόδειξη: Για την '$\leq$', χρησιμοποιείστε ότι κάθε ανοικτό διάστημα (a,b) είναι της μορφής $(a,b) = \cup_n (c_n, c_{n+1}]$ (γιατί;). Για την '$\geq$', χρησιμοποιείστε ότι $\mu = \mu_F$ όπου F δεξιά συνεχής.]

10. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι το E περιέχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο. [*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι μπορείτε να υποθέσετε ότι $E \subseteq [0,1]$. Κατόπιν, μιμηθείτε την απόδειξη της ύπαρξης μη μετρήσιμου υποσυνόλου της περιφέρειας $S^1 \simeq [0,1)$.]

11. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > \alpha m(I)$.

12. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ περιέχει ένα διάστημα με κέντρο το 0. [*Υπόδειξη:* Από την προηγούμενη άσκηση, υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > 3m(I)/4$.]

13. Έστω $N \subset \mathbb{R}$ με $m(N) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x^2 : x \in N\}$ έχει μέτρο $m(Z) = 0$.

14. Έστω $\delta \in (0,1)$. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο C_δ του $[0,1]$ ακολουθώντας τα βήματα της κατασκευής του συνόλου του Cantor, με τη διαφορά ότι: στο k-βήμα, από κάθε διάστημα αφαιρείτε ένα ανοικτό υποδιάστημα μήκους $\delta/3^k$. Δείξτε ότι το C_δ είναι τέλειο, έχει μέτρο $\mu(C_\delta) = 1 - \delta$, και δεν περιέχει κανένα διάστημα.