# Θεώρημα Radon - Nikodym – Διαφόριση

## 5 Προσημασμένα μέτρα

**Παράδειγμα 5.1** *Αν $(X, \mathcal{S})$ είναι μετρήσιμος χώρος* [1] *και $\mu_1, \mu_2$ είναι πεπερασμένα μέτρα στην $\mathcal{S}$, η απεικόνιση*

$$\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R} : \qquad E \to \mu_1(E) - \mu_2(E)$$

*ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} &(i)\ \nu(\emptyset) = 0 \\ &(ii)\ \text{αν } E_n \in \mathcal{S} \ \text{ είναι ξένα ανά δύο τότε } \ \nu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \nu(E_n) \end{aligned} \tag{1}$$

**Παράδειγμα 5.2** *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, η σχέση*

$$E \to \nu(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}$$

*ορίζει (θετικό) μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Παρατήρησε ότι αν $\mu(E) = 0$ τότε $\nu(E) = 0$.*

*Γενικότερα αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη και το ολοκλήρωμα $\int f d\mu$ ορίζεται (βλ. τον Ορισμό 3.6), η συνολοσυνάρτηση*

$$\mathcal{S} \to [-\infty, +\infty] : E \to \nu(E) = \int_E f d\mu \tag{2}$$

*είναι διαφορά δύο μέτρων, τουλάχιστον ένα εκ των οποίων είναι πεπερασμένο, επομένως ικανοποιεί τις σχέσεις (1) και παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $-\infty$ και $+\infty$.*

**Ορισμός 5.1** ***Προσημασμένο μέτρο*** *είναι μια συνολοσυνάρτηση $\mathcal{S} \to [-\infty, +\infty] : E \to \nu(E)$ που παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $-\infty$ και $+\infty$ και ικανοποιεί τις σχέσεις (1).*

***Μιγαδικό μέτρο*** *είναι μια συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (1).*

**Παρατηρήσεις 5.3 (α)** Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα (θετικό) μέτρο είναι προσημασμένο μέτρο, ενώ ένα προσημασμένο μέτρο δεν είναι πάντα μιγαδικό μέτρο. Άλλοι συγγραφείς (π.χ. Κουμουλλής – Νεγρεπόντης), με τον όρο προσημασμένο μέτρο εννοούν ένα μιγαδικό μέτρο με πραγματικές τιμές.

[1] RN, 12/02/09

**(β)** Αν στην $(ii)$ έχουμε $|\nu(\cup_n E_n)| < \infty$ (ειδικότερα αν το μέτρο ειναι μιγαδικό) η σειρά συγκλίνει. Τότε, επειδή κάθε αναδιάταξη $\sum_n E_{\pi(n)}$ της σειράς έχει το ίδιο όριο $\nu(\bigcup_n E_{\pi(n)}) = \nu(\bigcup_n E_n)$, η σύγκλιση είναι απόλυτη.[2]

**(γ)** Αν $\mu_1$ και $\mu_2$ είναι (θετικά) μέτρα, το άθροισμά τους είναι θετικό μέτρο, αλλά η διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ δεν είναι εν γένει προσημασμένο μέτρο.

Το σύνολο των μιγαδικών μέτρων είναι μιγαδικός γραμμικός χώρος ως προς τις πράξεις κατά σημείο, όπως ο χώρος $L^1(X, \mu)$.

**(δ)** Θα δούμε ότι όλα τα προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$ είναι της μορφής $\mu_1 - \mu_2$ για κατάλληλα θετικά μέτρα $\mu_i$ και επίσης της μορφής (2) για κατάλληλο θετικό μέτρο $\mu$ και μετρήσιμη $f : X \to [-\infty, +\infty]$.

Αν δοθεί ένα θετικό μέτρο $\mu$ στον $(X, \mathcal{S})$, είναι αλήθεια ότι όλα τα προσημασμένα μέτρα $\nu$ στον $(X, \mathcal{S})$ είναι της μορφής (2); Όχι!

Παράδειγμα το μέτρο Dirac $\delta_0$ στο 0: Αν ικανοποιούσε την (2) ως προς το μέτρο Lebesgue $\lambda$ τότε η $f$ θα έπρεπε να ικανοποιεί $f(x) = 0$ $\lambda$-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, οπότε $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = 0 \neq \delta_0(\mathbb{R})$.

Παρατήρησε ότι όταν το $\nu$ ικανοποιεί την (2) τότε ικανοποιεί, εκτός από τις $(i)$ και $(ii)$, και την σχέση

$$(iii) \quad \text{αν } \mu(E) = 0 \text{ τότε } \nu(E) = 0$$

ενώ για το $\delta_0$ ισχύει το «άκρως αντίθετο»: Υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\lambda(E) = 0$ ενώ $\delta_0(E^c) = 0$ (πράγματι, $E = \{0\}$).

Ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο θα αποδείξουμε με την επιπλέον υπόθεση ότι το $\nu$ είναι $\sigma$-πεπερασμένο (δες Θεώρημα 5.21):

**Θεώρημα 5.4 (Radon - Nikodym I)** *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος $\sigma$-πεπερασμένου μέτρου και $\nu$ είναι θετικό μέτρο τότε υπάρχει μετρήσιμη $f : X \to [0, +\infty]$, ώστε*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}$$

*αν και μόνον αν*

$$E \in \mathcal{S},\ \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

*Η $f$ είναι μοναδική modulo ισότητα $\mu$-σ.π.*

[2] **Απόδειξη** (α) Έστω πρώτα ότι το $\nu$ είναι προσημασμένο μέτρο. Υποθέτουμε ότι δεν παίρνει την τιμή $-\infty$ (αλλιώς, θεωρούμε το $-\nu$). Η σειρά $\sum_n \nu(E_n)$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $\nu(\cup_n E_n)$. Θέτοντας $\mathbb{N}_1 = \{n : \nu(E_n) \geq 0\}$ και $\mathbb{N}_2 = \{n : \nu(E_n) < 0\}$ παρατηρούμε ότι οι δύο σειρές $\sum_{n \in \mathbb{N}_1} \nu(E_n) = \nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1})$ και $\sum_{n \in \mathbb{N}_2} (-\nu(E_n)) = -\nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_2})$ έχουν και οι δύο μη αρνητικούς όρους, άρα ή συγκλίνουν ή τείνουν στο $+\infty$. Εφόσον όμως $\nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_2}) > -\infty$, η δεύτερη αναγκαστικά συγκλίνει. Επειδή η διαφορά τους είναι η συγκλίνουσα σειρά $\sum_n \nu(E_n)$, έπεται ότι και οι δύο συγκλίνουν (στο $\mathbb{R}$). Έχουμε λοιπόν

$$\sum_{n \in \mathbb{R}} |\nu(E_n)| = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} |\nu(E_n)| + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} |\nu(E_n)| = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \nu(E_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_2} (-\nu(E_n)) \in \mathbb{R}.$$

(β) Αν το $\nu$ είναι μιγαδικό μέτρο, τότε τα $\nu_1(E) = \mathrm{Re}\, \nu(E)$ και $\nu_2(E) = \mathrm{Im}\, \nu(E)$ είναι προσημασμένα μέτρα με πραγματικές μόνον τιμές, οπότε $\sum_n |\nu(E_n)| \leq \sum_n |\nu_1(E_n)| + \sum_n |\nu_2(E_n)| < +\infty$.

## 5.1 Αναλύσεις μέτρων

**Λήμμα 5.5** *Έστω $\nu$ προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ και $(E_n)$ στην $\mathcal{S}$. Αν η $(E_n)$ είναι αύξουσα, τότε $\nu(\cup E_n) = \lim_n \nu(E_n)$. Αν η $(E_n)$ είναι φθίνουσα και $\nu(E_1) \in \mathbb{R}$, τότε $\nu(\cap E_n) = \lim_n \nu(E_n)$.*

**Ορισμός 5.2** *Έστω $\nu$ προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Ένα σύνολο $E \in \mathcal{S}$ λέγεται*

- **θετικό** *για το $\nu$ αν* $\quad F \in \mathcal{S}, F \subseteq E \Rightarrow \nu(F) \geq 0$
- **αρνητικό** *για το $\nu$ αν* $\quad F \in \mathcal{S}, F \subseteq E \Rightarrow \nu(F) \leq 0$
- **μηδενικό** *για το $\nu$ αν* $\quad F \in \mathcal{S}, F \subseteq E \Rightarrow \nu(F) = 0.$

Αν το $\nu$ είναι θετικό μέτρο, τότε ένα $E \in \mathcal{S}$ είναι μηδενικό για το $\nu$ αν και μόνον αν $\nu(E) = 0$.

**Παράδειγμα 5.6** *Αν το $\nu$ ορίζεται από τη σχέση $\nu(E) = \int_E f d\mu$ όπου $\mu$ θετικό μέτρο και $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, τότε ένα $E$ είναι $\nu$-θετικό αν και μόνον αν $f(x) \geq 0$ $\mu$-σχεδόν για κάθε $x \in E$.*

**Λήμμα 5.7** *(α) Αν το $E$ είναι θετικό για το $\nu$ και $F \in \mathcal{S}$ είναι υποσύνολο του $E$ τότε το $F$ είναι θετικό για το $\nu$ και $\nu(F) \leq \nu(E)$.*

*(β) Αν τα $E_n$ είναι θετικά για το $\nu$ τότε το $\cup_n E_n$ είναι θετικό για το $\nu$.*

**Απόδειξη** (α) Αν $G \in \mathcal{S}$ και $G \subseteq F$ τότε $G \subseteq E$ άρα $\nu(G) \geq 0$. Δηλαδή το $F$ είναι $\nu$-θετικό. Επίσης $\nu(E \setminus F) \geq 0$ άρα $\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F) \geq \nu(F)$.

(β) Αν $F_n = E_n \setminus \cup_{k<n} E_k$ τότε τα $F_n$ είναι $\nu$-θετικά από το (α). Έπεται ότι αν $F \in \mathcal{S}$ είναι υποσύνολο του $\cup_n E_n$ τότε $\nu(F) = \sum_n \nu(F \cap F_n) \geq 0$.

**Θεώρημα 5.8 (Ανάλυση Hahn)** *Έστω $\nu$ προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Τότε υπάρχει μετρήσιμη διαμέριση*

$$X = P \cup N, \qquad P \cap N = \emptyset \quad \text{όπου } P \ \text{ θετικό για το } \nu, \ N \ \text{ αρνητικό για το } \nu.$$

*Αν $X = P' \cup N'$ είναι μια άλλη τέτοια διαμέριση, τότε το $P \triangle P' = N \triangle N'$ είναι μηδενικό για το $\nu$.*

**Απόδειξη** Εξ ορισμού το $\nu$ δεν μπορεί να παίρνει και τις δύο τιμές $+\infty, -\infty$. Υποθέτουμε ότι

$$\text{για κάθε } \ E \in \mathcal{S}, \quad \text{ισχύει } \ \nu(E) < +\infty$$

(αλλιώς, θεωρούμε το $-\nu$).

$(i)$ Ας ονομάσουμε $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ την οικογένεια των $\nu$-θετικών μετρήσιμων συνόλων.

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{P}$ περιέχει το $\emptyset$, άρα είναι μη κενή . Έστω $m = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{P}\} \in [0, +\infty]$. Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}$ στην $\mathcal{P}$ ώστε $\nu(E_n) \to m$. Επειδή η $\mathcal{P}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις (Λήμμα 5.7), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Αν λοιπόν θέσουμε $P = \cup_n E_n$, από το Λήμμα 5.7 έπεται ότι $P \in \mathcal{P}$ και από το Λήμμα 5.5 ότι $\nu(P) = \lim \nu(E_n) = m$, οπότε έχουμε $m < \infty$.

$(ii)$ Θέτουμε $N = P^c$.

*Παρατήρηση (α). Το $N$ δεν μπορεί να περιέχει σύνολα $E \in \mathcal{P}$ με $\nu(E) > 0$.*

Πράγματι, αν περιείχε ένα τέτοιο $E$, τότε $P \cup E \in \mathcal{P}$ και

$$\nu(P \cup E) = \nu(P) + \nu(E) = m + \nu(E) > m,$$

ενώ το $m$ ικανοποιεί εξ ορισμού $m \geq \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{P}$.

*Παρατήρηση (β). Αν $A \in \mathcal{S}$, $A \subseteq N$ και $\nu(A) > 0$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{S}$, $B \subseteq A$ με $\nu(B) > \nu(A)$.*

Πράγματι, από το (α) έχουμε $A \notin \mathcal{P}$, άρα υπάρχει $C \in \mathcal{S}$, $C \subseteq A$ ώστε $\nu(C) < 0$. Θέτοντας $B = A \setminus C$ έχουμε $\nu(B) + \nu(C) = \nu(A)$ άρα $\nu(B) > \nu(A)$.

$(iii)$ Θα δείξουμε ότι το $N$ είναι $\nu$-αρνητικό.

Υποθέτουμε ότι δεν είναι. Θα βρούμε επαγωγικά μια *φθίνουσα* ακολουθία $\{A_n\}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του $N$ με όλο και *μεγαλύτερο* θετικό μέτρο. Αυτό θα μας οδηγήσει σε άτοπο, όπως θα δούμε.

Αφού υποθέσαμε ότι το $N$ δεν είναι $\nu$-αρνητικό, θα περιέχει $A \in \mathcal{S}$ με $\nu(A) > 0$.

Επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο το σύνολο $\{A \in \mathcal{S},\, A \subseteq N,\, \nu(A) > \frac{1}{n}\}$ δεν είναι κενό. Έστω $n_1$ ο μικρότερος τέτοιος $n$.

Επιλέγουμε $\quad A_1 \in \mathcal{S}$, $A_1 \subseteq N$ με $\nu(A_1) > \frac{1}{n_1}$.

Από την Παρατήρηση (β) υπάρχει $B \in \mathcal{S}$, $B \subseteq A_1$ με $\nu(B) > \nu(A_1)$.

Έστω $n_2$ ο μικρότερος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $B \in \mathcal{S}$, $B \subseteq A_1$ με $\nu(B) > \nu(A_1) + \frac{1}{n}$.

Επιλέγουμε $A_2 \in \mathcal{S}$, $A_2 \subseteq A_1$ με $\nu(A_2) > \nu(A_1) + \frac{1}{n_2}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: Αν έχουμε επιλέξει

$$N \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{j-1}$$

μετρήσιμα και αντίστοιχα $n_1, \ldots, n_{j-1}$, από την Παρατήρηση (β) υπάρχει $C \in \mathcal{S}$, $C \subseteq A_{j-1}$ με $\nu(C) > \nu(A_{j-1})$, οπότε αν $n_j$ είναι ο μικρότερος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $C \in \mathcal{S}$, $C \subseteq A_{j-1}$ με $\nu(C) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n}$, επιλέγουμε
$A_j \subseteq A_{j-1}$ ώστε $\nu(A_j) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n_j}$.

Αν $A = \cap_j A_j$ τότε $0 < \sup \nu(A_j) = \lim_j \nu(A_j) = \nu(A) < +\infty$. Επομένως $\nu(A_j) - \nu(A_{j-1}) \to 0$ και αφού $\nu(A_j) - \nu(A_{j-1}) > \frac{1}{n_j}$ έπεται ότι $\frac{1}{n_j} \to 0$, δηλ. $n_j \to \infty$.

Όμως $A \subseteq N$ και $\nu(A) > 0$, οπότε υπάρχει $D \subseteq A$ μετρήσιμο με $\nu(D) > \nu(A)$. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί $\nu(D) > \nu(A) + \frac{1}{n}$, τότε για κάθε $j$ έχουμε $\nu(D) > \nu(A) + \frac{1}{n} \geq \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n}$. Όμως ο $n_j$ είναι εξ ορισμού ο μικρότερος που μπορεί να ικανοποιεί την ανισότητα $\nu(D) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n}$, οπότε $n_j \leq n$. Δηλαδή το $n$ είναι άνω φράγμα της $(n_j)$, σε αντίθεση με το γεγονός ότι $n_j \to \infty$.

Η αντίφαση προήλθε από την υπόθεση ότι το $N$ περιέχει μετρήσιμα σύνολα θετικού μέτρου. Κατά συνέπεια αυτό δεν ισχύει, άρα κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $E \subseteq N$ ικανοποιεί $\nu(E) \leq 0$, δηλαδή το $N$ είναι $\nu$-αρνητικό.

$(iv)$ Αν $X = P' \cup N'$ είναι μια άλλη διαμέριση σε $\nu$-θετικό και $\nu$-αρνητικό σύνολο, τότε έχουμε $P \setminus P' = P \cap (P')^c = P \cap N'$ άρα το $P \setminus P'$ είναι $\nu$-αρνητικό γιατί περιέχεται στο

$N'$, αλλά και $\nu$-θετικό γιατί περιέχεται στο $P$. Άρα το $P \setminus P'$ είναι $\nu$-μηδενικό. Ομοίως το $P' \setminus P = P' \cap N$ είναι $\nu$-μηδενικό, άρα το $P \triangle P'$ είναι $\nu$-μηδενικό. Η ισότητα $P \triangle P' = N \triangle N'$ είναι άμεση. $\square$

**Παρατηρήσεις 5.9** ($i$) Εν γένει η ανάλυση $X = P \cup N$ δεν είναι μοναδική: αν $\Omega \subseteq P$ είναι ένα $\nu$-μηδενικό σύνολο, θέτοντας $P_1 = P \setminus \Omega$ και $N_1 = N \cup \Omega$ έχουμε μια (ενδεχομένως) διαφορετική διαμέριση. Το ($iv$) στην απόδειξη δείχνει ότι αυτό είναι το «χειρότερο» που μπορεί να συμβεί.

($ii$) Αν ονομάσουμε $P_o$ την ένωση όλων των $\nu$-θετικών (μετρήσιμων) συνόλων, το $P_o$ μπορεί να μην είναι μετρήσιμο. Γι αυτό ορίσαμε το σύνολο $P$ μέσω μιάς *ακολουθίας* $\nu$-θετικών συνόλων.

Το σύνολο $P$ «$\nu$-σχεδόν περιέχει» όλα τα $\nu$-θετικά σύνολα, με την έννοια ότι αν $A \in \mathcal{P}$, τότε το $A \cap P^c$ είναι $\nu$-μηδενικό: πράγματι, κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $E \subseteq A \cap P^c$ ανήκει στην $\mathcal{P}$ και περιέχεται στο $N$, άρα αναγκαστικά ικανοποιεί $\nu(E) = 0$.

**Ορισμός 5.3** *Αν $\mu, \nu$ είναι δύο προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$, το $\nu$ λέγεται **κάθετο στο** $\mu$ ή $\mu$-**ιδιάζον (singular)** αν υπάρχει μετρήσιμη διαμέριση $X = A \cup A^c$ ώστε το $A$ να είναι $\nu$-μηδενικό και το $A^c$ να είναι $\mu$-μηδενικό. Γράφουμε $\mu \perp \nu$.*

Δηλαδή όχι μόνο το $A^c$, αλλά *κάθε* μετρήσιμο υποσύνολο $E$ του $A^c$ έχει $\mu(E) = 0$. Λέμε ότι το $\mu$ είναι **συγκεντρωμένο (concentrated)** στο $A$. Ομοίως το $\nu$ είναι συγκεντρωμένο στο $A^c$.

Για παράδειγμα αν $\delta_0$ είναι το μέτρο Dirac στο $0 \in \mathbb{R}$ και $m$ είναι το μέτρο Lebesgue, τότε $\delta_0 \perp m$ γιατί το $\{0\}$ είναι $m$-μηδενικό ενώ το $\{0\}^c$ είναι $\delta_0$-μηδενικό.

**Θεώρημα 5.10 (Ανάλυση Jordan)** *Αν $\nu$ είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$, υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα $\nu_+$ και $\nu_-$ στον $(X, \mathcal{S})$, τουλάχιστον ένα από τα οποία είναι πεπερασμένο, ώστε*

$$\nu = \nu_+ - \nu_- \quad \textit{και} \;\; \nu_+ \perp \nu_-.$$

**Απόδειξη** Έστω $X = P \cup N$ μια ανάλυση Hahn για το $\nu$. Τότε για κάθε $E \in \mathcal{S}$,

$$E = (E \cap P) \cup (E \cap N)$$
$$\text{άρα} \quad \nu(E) = \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N).$$

Ορίζουμε τα $\nu_+$ και $\nu_-$ από τις σχέσεις

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P) \quad \text{και} \qquad \nu_-(E) = -\nu(E \cap N) \qquad (E \in \mathcal{S})$$

και έχουμε δύο θετικά μέτρα. Αν το $\nu$ δεν παίρνει την τιμή $+\infty$, τότε για *κάθε* $E \in \mathcal{S}$ ισχύει $\nu(E \cap P) \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή το $\nu_+$ είναι πεπερασμένο, ενώ αν δεν παίρνει την τιμή $-\infty$, τότε το $\nu_-$ είναι πεπερασμένο. Και στις δύο περιπτώσεις, για κάθε $E \in \mathcal{S}$ η διαφορά $\nu_+(E) - \nu_-(E)$ ορίζεται και ισούται με $\nu(E)$.

Επίσης από την κατασκευή, αν ένα $E \in \mathcal{S}$ περιέχεται στο $N$ τότε $\nu_+(E) = 0$, άρα το $N$ είναι $\nu_+$-μηδενικό, και ομοίως το $P$ είναι $\nu_-$-μηδενικό. Επομένως $\nu_+ \perp \nu_-$.

*Μοναδικότητα* Έστω $\nu = \mu_+ - \mu_-$ όπου τα $\mu_+$, $\mu_-$ είναι κάθετα θετικά μέτρα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη διαμέριση $X = A \cup A^c$ ώστε το $A^c$ να είναι $\mu_+$-μηδενικό και το $A$

να είναι $\mu_-$-μηδενικό. Έπεται ότι το $A$ είναι $\nu$-θετικό (γιατί αν $E \in \mathcal{S}$ και $E \subseteq A$ τότε $\mu_-(E) = 0$ αφού το $A$ είναι $\mu_-$-μηδενικό, οπότε $\nu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E) = \mu_+(E) \geq 0$) ενώ το $A^c$ είναι $\nu$-αρνητικό. Επομένως η διαμέριση $X = A \cup A^c$ είναι μια ανάλυση Hahn για το $\nu$. Από το Θεώρημα 5.8, το $P \triangle A = A^c \triangle N$ είναι $\nu$-μηδενικό. Έπεται ότι για κάθε $E \in \mathcal{S}$ έχουμε [3] $\nu(E \cap P) = \nu(E \cap A)$, άρα

$$\begin{aligned} \nu_+(E) &= \nu(E \cap P) = \nu(E \cap A) = \mu_+(E \cap A) - \mu_-(E \cap A) \\ &= \mu_+(E \cap A) + \mu_+(E \cap A^c) - 0 = \mu_+(E) \end{aligned}$$

(γιατί $\mu_-(E \cap A) = 0$ και $\mu_+(E \cap A^c) = 0$) δηλαδή $\nu_+(E) = \mu_+(E)$ και επομένως $\nu_-(E) = \mu_-(E)$. $\square$

**Παρατήρηση 5.11** Μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\nu_+$ και $\nu_-$ από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \nu_+(E) &= \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\} \\ \nu_-(E) &= \sup\{-\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\} \qquad (E \in \mathcal{S}). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται ως εξής: Επειδή $E \cap N \subseteq E$ έχουμε

$$\nu_-(E) = -\nu(E \cap N) \leq \sup\{-\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\}$$

ενώ για κάθε $F \in \mathcal{S}$ με $F \subseteq E$ έχουμε

$$-\nu(F) = \nu_-(F) - \nu_+(F) \leq \nu_-(F) \leq \nu_-(E)$$

(διότι τα $\nu_+$ και $\nu_-$ είναι θετικά μέτρα) επομένως $\sup\{-\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\} \leq \nu_-(E)$ άρα ισχύει ισότητα.

Αυτό αποτελεί μια δεύτερη απόδειξη ότι οι κυμάνσεις του $\nu$ είναι ανεξάρτητες από την ανάλυση Hahn που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό τους.

**Ορισμός 5.4** *Αν $\nu$ είναι ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$, τα θετικά μέτρα $\nu_+, \nu_-$ που ορίσαμε λέγονται **η θετική και η αρνητική κύμανση** του $\nu$ και το θετικό μέτρο $|\nu|$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

*λέγεται **η ολική κύμανση** του $\nu$.*

**Παρατήρηση 5.12** Αν $f = \chi_P - \chi_N$ και $\mu = |\nu|$ τότε $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

**Άσκηση 5.13** Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ και $\nu(E) = \int_E f d\mu$, τότε $\nu_+(E) = \int_E f_+ d\mu$ και $\nu_-(E) = \int_E f_- d\mu$ (επομένως $|\nu|(E) = \int_E |f| d\mu$).

**Άσκηση 5.14** Αν $\nu$ είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ και $E \in \mathcal{S}$, τότε

$$|\nu|(E) = \sup\{\sum_{k=1}^n |\nu(E_k)| : E_k \in \mathcal{S} \text{ ξένα}, \ \bigcup_{k=1}^n E_k = E\}$$

και το $|\nu|$ είναι το μικρότερο θετικό μέτρο $\mu$ στον $(X, \mathcal{S})$ με την ιδιότητα $\mu(E) \geq |\nu(E)|$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$.

**Άσκηση 5.15** Αν $\nu, \mu$ είναι προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$, τότε

(α) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{S}$ είναι $\nu$-μηδενικό αν και μόνον αν $|\nu|(E) = 0$.

(β) $\nu \perp \mu \Leftrightarrow |\nu| \perp \mu \Leftrightarrow (\nu_+ \perp \mu$ και $\nu_- \perp \mu)$.

[3] $\nu(E \cap P) - \nu(E \cap A) = \nu(E \cap (P \setminus A)) = 0$ γιατί $E \cap (P \setminus A) \subseteq P \triangle A$ που είναι $\nu$-μηδενικό σύνολο

## 5.2 Το Θεώρημα Lebesgue - Radon - Nikodym

**Ορισμός 5.5** *Έστω $\mu$ θετικό μέτρο και $\nu$ προσημασμένο ή μιγαδικό ή θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{S})$. Το $\nu$ λέγεται* ***απόλυτα συνεχές*** *ως προς $\mu$ (γράφουμε $\nu \ll \mu$) αν*

$$E \in \mathcal{S}, \;\; \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

*Δύο θετικά μέτρα $\mu$ και $\nu$ λέγονται* ***ισοδύναμα*** *αν $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.*

**Άσκηση 5.16** Έστω $\mu$ θετικό μέτρο και $\nu$ προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{S})$. Δείξτε τα ακόλουθα:

- Αν $\nu \ll \mu$ τότε κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) = 0$ είναι $\nu$-μηδενικό (Ορισμός 5.2).
- Αν κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) = 0$ είναι $\nu$-μηδενικό τότε $\nu_+ \ll \mu$ και $\nu_- \ll \mu$.
- Αν $\nu_+ \ll \mu$ και $\nu_- \ll \mu$ τότε $|\nu| \ll \mu$.
- Αν $|\nu| \ll \mu$ τότε $\nu \ll \mu$.

Επομένως όλες οι συνθήκες είναι ισοδύναμες.

**Παρατήρηση 5.17** Αν $\nu \ll \mu$ και $\nu \perp \mu$ τότε $\nu = 0$.

Πράγματι, αν $\nu \perp \mu$ τότε υπάρχει μετρήσιμη διαμέριση $X = E \cup F$ με το $E$ $\mu$-μηδενικό και το $F$ $\nu$-μηδενικό (οπότε $|\nu|(F) = 0$ από την Άσκηση 5.15) και έχουμε

$$|\nu|(X) = |\nu|(E) + |\nu|(F) = |\nu|(E) = 0$$

διότι $|\nu| \ll \mu$, επομένως $|\nu| = 0$, άρα $\nu = 0$.

**Πρόταση 5.18** *Έστω $\nu$ ένα προσημασμένο* πεπερασμένο *μέτρο (δηλαδή $\nu(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}$). Το $\nu$ είναι $\mu$-απόλυτα συνεχές αν και μόνον αν*

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε αν } E \in \mathcal{S} \text{ και } \mu(E) < \delta \text{ τότε } |\nu(E)| < \epsilon. \tag{3}$$

**Απόδειξη** Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (3). Αν $\mu(E) = 0$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ έπεται από την (3) ότι $|\nu(E)| < \epsilon$, άρα $\nu(E) = 0$. Δείξαμε ότι $\nu \ll \mu$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη (3) δεν αληθεύει. Υπάρχει τότε $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $E_\delta \in \mathcal{S}$ ώστε $\mu(E_\delta) < \delta$ και $|\nu(E_\delta)| \geq \epsilon$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για $\delta = \frac{1}{2^n}$, βρίσκουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ένα $E_n \in \mathcal{S}$ με $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ και $|\nu(E_n)| \geq \epsilon$.

Θέτουμε τώρα $\quad F = \limsup E_n = \bigcap_{n \geq 1} F_n \;$ όπου $\; F_n = \bigcup_{k \geq n} E_k$ και έχουμε

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{άρα} \quad \mu(F) = \lim \mu(F_n) = 0 \text{ (αφού } \mu(F_1) \leq 1 < \infty)$$

ενώ $\;|\nu|(F_n) \geq |\nu|(E_n) \geq \epsilon\;$ άρα $\;|\nu|(F) = \lim |\nu|(F_n) \geq \epsilon\;$ (αφού $|\nu|(F_1) < \infty$ γιατί το $\nu$, άρα και το $|\nu|$, είναι πεπερασμένο).

Βρήκαμε λοιπόν $F \in \mathcal{S}$ με $\mu(F) = 0$ και $|\nu|(F) > 0$, οπότε το $|\nu|$ δεν είναι $\mu$-απόλυτα συνεχές, άρα ούτε και το $\nu$ (Άσκηση 5.16). $\square$

**Πόρισμα 5.19** *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $f \in L^1(X, \mu)$ τότε*

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε αν } E \in \mathcal{S} \text{ και } \mu(E) < \delta \text{ τότε } \left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon.$$

Το επόμενο Λήμμα θα χρειασθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος Lebesgue - Radon - Nikodym.

**Λήμμα 5.20** *Αν $\nu, \mu$ είναι πεπερασμένα θετικά μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$, τότε:*
*ή $\nu \perp \mu$ ή αλλιώς (δηλαδή αν $\nu \not\perp \mu$) υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) > 0$ ώστε $\nu(F) \geq \epsilon\mu(F)$ για κάθε $F \in \mathcal{S}$, $F \subseteq E$ (δηλ. το $E$ είναι θετικό σύνολο για το προσημασμένο μέτρο $\nu - \epsilon\mu$).*

**Απόδειξη** (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι δεν μπορεί να συμβαίνουν και τα δύο: Πράγματι, αν $\nu \perp \mu$, οπότε υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ ώστε $\nu(A) = 0$ και $\mu(A^c) = 0$, τότε για κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) > 0$ έχουμε $\nu(A \cap E) = 0$, οπότε, για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\nu(A \cap E) - \epsilon\mu(A \cap E) < 0$$

διότι $\mu(A \cap E) = \mu(E) > 0$, δηλαδή το $E$ δεν είναι θετικό για το μέτρο $\nu - \epsilon\mu$.

(β) Αν $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το προσημασμένο μέτρο $\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$ και μια ανάλυση Hahn $X = P_n \cup N_n$ σε $\nu_n$-θετικό και $\nu_n$-αρνητικό σύνολο.

Ορίζουμε $P = \bigcup_n P_n$ και $N = P^c = \bigcap N_n$. Για κάθε $n$, εφόσον $N \subseteq N_n$ έχουμε $\nu_n(N) \leq 0$, δηλαδή $\nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N)$. Εφόσον $\nu(N) \geq 0$ και $\mu(N) < \infty$, έπεται ότι $\nu(N) = 0$.

Υπάρχουν τώρα δύο περιπτώσεις: $\mu(P) = 0$ ή $\mu(P) > 0$.

Αν $\mu(P) = 0$, έπεται ότι $\mu \perp \nu$.

Αν $\mu(P) > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(P_n) > 0$. Θέτουμε τότε $\epsilon = \frac{1}{n}$, οπότε το $E \equiv P_n$ ικανοποιεί $\mu(E) > 0$ και εξ υποθέσεως είναι θετικό για το προσημασμένο μέτρο $\nu_n = \nu - \epsilon\mu$. $\square$

**Θεώρημα 5.21 (Lebesgue - Radon - Nikodym)** *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος $\sigma$-πεπερασμένου μέτρου. Αν $\nu$ είναι ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ με $|\nu|$ $\sigma$-πεπερασμένο, τότε*
***(α) Ανάλυση Lebesgue:*** *υπάρχουν μοναδικά προσημασμένα μέτρα $\lambda$, $\rho$ ώστε*

$$\nu = \lambda + \rho, \quad \text{όπου } \lambda \perp \mu \text{ και } \rho \ll \mu$$

***(β) Radon - Nikodym:*** *υπάρχει $\mu$-σχεδόν μοναδική ολοκληρώσιμη $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\rho(E) = \int_E f d\mu \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}.$$

*Αν το $\nu$ είναι θετικό μέτρο, τότε τα $\lambda, \rho$ είναι θετικά μέτρα και η $f$ μη αρνητική.*
*Αν το $|\nu|$ είναι πεπερασμένο μέτρο, τότε $f \in L^1(X, |\nu|)$.*

**Απόδειξη. Μοναδικότητα:** Αν $\nu = \lambda + \rho = \lambda' + \rho'$ τότε, επειδή $\lambda \perp \mu$ και $\lambda' \perp \mu$, υπάρχουν $N, N' \in \mathcal{S}$ με $\mu(N) = \mu(N') = 0$ ώστε το $N^c$ να είναι $\lambda$-μηδενικό και το $N'^c$ $\lambda'$-μηδενικό. Θέτοντας $M = N \cup N'$ έχουμε $\mu(M) = 0$ και το $M^c$ είναι $\lambda$-μηδενικό και

$\lambda'$-μηδενικό. Επίσης $\rho \ll \mu$ και $\rho' \ll \mu$ άρα το $M$ είναι $\rho$-μηδενικό και $\rho'$-μηδενικό. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $E \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \lambda(E\cap M) = \lambda(E\cap M) + \rho(E\cap M) = \nu(E\cap M)\\ &= \lambda'(E\cap M) + \rho'(E\cap M) = \lambda'(E\cap M) = \lambda(E),\end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda = \lambda'$ και ομοίως $\rho(E) = \rho(E\cap M^c) = \rho'(E\cap M^c) = \rho'(E)$. Έχουμε επομένως

$$\int_E f d\mu = \rho(E) = \rho'(E) = \int_E f' d\mu \qquad \text{για κάθε } \ E \in \mathcal{S}$$

το οποίο δείχνει ότι $f = f'$ $\mu$-σχεδόν παντού.

**Ύπαρξη: Περίπτωση I** *Υποθέτουμε ότι τα $\nu, \mu$ είναι θετικά και πεπερασμένα μέτρα.*
**Κατασκευή της παραγώγου Radon-Nikodym f.** Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{H} = \{h : X \to [0,+\infty] \text{ μετρήσιμη} : \int_A h d\mu \le \nu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{S}\}.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{H}$ ώστε $\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$ και ότι αυτή είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι

1. $\mathcal{H} \neq \emptyset$, αφού $0 \in \mathcal{H}$.
2. Αν $h, g \in \mathcal{H}$ τότε [4] $h \vee g \in \mathcal{H}$.
3. Αν $(h_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία με $h_n \in \mathcal{H}$ για κάθε $n$ τότε $\lim_n h_n \in \mathcal{H}$.

*Απόδειξη του (2):* Θέτοντας $B = \{x : h(x) \ge g(x)\}$, έχουμε $B \in \mathcal{S}$ και, για κάθε $A \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\int_A (h\vee g)d\mu &= \int_{A\cap B}(h\vee g)d\mu + \int_{A\setminus B}(h\vee g)d\mu\\ &= \int_{A\cap B} h d\mu + \int_{A\setminus B} g d\mu \le \nu(A\cap B) + \nu(A\setminus B) = \nu(A).\end{aligned}$$

*Απόδειξη του (3):* Από μονότονη σύγκλιση

$$\int_A \lim_n h_n d\mu = \int \lim_n h_n \chi_A d\mu = \lim_n \int h_n \chi_A d\mu \le \nu(A).]$$

Κάθε $h \in \mathcal{H}$ ικανοποιεί $\int h d\mu \le \nu(X) < +\infty$, οπότε θέτοντας

$$a = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$$

έχουμε $0 \le a \le \nu(X)$.

**Ισχυρισμός** Υπάρχει $f \in \mathcal{H}$ ώστε $\int f d\mu = a$.

**Απόδειξη** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $h_n \in \mathcal{H}$ ώστε $\int h_n d\mu > a - \frac{1}{n}$. Έστω $g_n = h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n$. Τότε $g_n \in \mathcal{H}$, $\int g_n d\mu \ge \int h_n d\mu > a - \frac{1}{n}$ και η $(g_n)$ είναι αύξουσα. Άρα αν

[4] $h \vee g = \max\{f, g\}$

$f = \sup_n g_n = \lim_n g_n$ έχουμε $f \in \mathcal{H}$ και $a \geq \int f d\mu \geq \int g_n d\mu > a - \frac{1}{n}$ για κάθε $n$, οπότε $a = \int f d\mu$. $\square$

**Ορισμός του μέτρου** $\lambda : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+ :$ $\quad \lambda(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{S})$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda(A) \geq 0$ εφόσον $f \in \mathcal{H}$. Επίσης το $\lambda$ είναι μέτρο, ως διαφορά δύο μέτρων. Μένει να αποδειχθεί ο

**Ισχυρισμός** $\quad \lambda \perp \mu$.

**Απόδειξη** Αν όχι, από το Λήμμα 5.20 υπάρχει $\epsilon > 0$ και $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) > 0$ και $\lambda(F) \geq \epsilon\mu(F)$ για κάθε $F \in \mathcal{S}$ με $F \subseteq E$. Έπεται ότι

$$\nu(F) = \lambda(F) + \int_F f d\mu \geq \epsilon\mu(F) + \int_F f d\mu.$$

Θέτοντας λοιπόν $g = f + \epsilon\chi_E$, η οποία είναι μετρήσιμη, έχουμε για κάθε $F \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\int_F g d\mu = \int_F f d\mu + \int_F \epsilon\chi_E d\mu &= \int_F f d\mu + \epsilon\mu(F \cap E) \\ \leq \int_F f d\mu + \lambda(F \cap E) &\leq \int_F f d\mu + \lambda(F) = \nu(F).\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $g \in \mathcal{H}$, οπότε $\int g d\mu \leq a$. Όμως

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \epsilon\mu(E) = a + \epsilon\mu(E) > a$$

άτοπο. *Η απόδειξη της Περίπτωσης Ι ολοκληρώθηκε.*

**Παρατήρηση** Εφόσον το μέτρο $\nu$ είναι πεπερασμένο, η (μη αρνητική) συνάρτηση $f$ ικανοποιεί $\int f d\mu \leq \nu(X) < +\infty$, δηλαδή $f \in L^1(X, \mu)$.

**Περίπτωση ΙΙ** Υποθέτουμε ότι τα $\nu, \mu$ είναι θετικά και $\sigma$-πεπερασμένα μέτρα.
Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{X_n\} \subseteq X$ από ξένα ανά δύο σύνολα με $X = \cup_n X_n$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\mu(X_n) < +\infty$ *και* $\nu(X_n) < +\infty$ (γιατί;)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τα μέτρα $\mu_n$ και $\nu_n$ στον $(X, \mathcal{S})$ από τις σχέσεις

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap X_n) \qquad \nu_n(E) = \nu(E \cap X_n) \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Τα μέτρα αυτά είναι πεπερασμένα. Παρατηρούμε μάλιστα ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g$ έχουμε $\int g d\mu_n = \int g\chi_{X_n} d\mu = \int_{X_n} g d\mu$ και ότι $\mu_n \ll \mu$.

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Περίπτωσης Ι στα $\nu_n$ και $\mu_n$ βρίσκουμε μη αρνητική συνάρτηση $f_n \in L^1(X, \mu_n)$ και θετικό πεπερασμένο μέτρο $\lambda_n$ κάθετο στο $\mu_n$ ώστε

$$\nu_n(E) = \lambda_n(E) + \int_E f_n d\mu_n \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον $\lambda_n \perp \mu_n$ και $\mu_n \ll \mu$, έχουμε $\lambda_n \perp \mu$. Εξάλλου εφόσον $\mu_n(X_n^c) = 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f_n$ μηδενίζεται παντού στο $X_n^c$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\nu_n(E) = \lambda_n(E) + \int_E f_n d\mu \qquad (E \in \mathcal{S}). \tag{4}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $f_n \in L^1(X,\mu)$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \le f_n(x) < +\infty$ για κάθε $x$ και κάθε $n$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ως εξής: κάθε $x \in X$ ανήκει σε ένα ακριβώς $X_n$· ορίζουμε $f(x) = f_n(x)$, δηλαδή $f = \sum_n f_n$. Η $f$ είναι μετρήσιμη και ικανοποιεί $0 \le f(x) < +\infty$ για κάθε $x$.

Προσθέτοντας τώρα τις ισότητες (4) κατά μέλη (όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί) έχουμε

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \sum_n \nu(E \cap X_n) = \sum_n \nu_n(E) = \sum_n \lambda_n(E) + \sum_n \int_E f_n d\mu \\ &= \sum_n \lambda_n(E) + \int_E \sum_n f_n d\mu = \sum_n \lambda_n(E) + \int_E f d\mu.\end{aligned}$$

Θέτουμε λοιπόν

$$\lambda(E) = \sum_n \lambda_n(E) \qquad (E \in \mathcal{S})$$

οπότε το $\lambda$ είναι θετικό μέτρο (και είναι $\sigma$-πεπερασμένο γιατί $\lambda(X_n) = \lambda_n(X) < +\infty$ για κάθε $n$). Μένει να δείξουμε ότι $\lambda \perp \mu$.

Πράγματι, αφού για κάθε $n$ ισχύει ότι $\lambda_n \perp \mu$ υπάρχει $N_n \in \mathcal{S}$ με $\mu(N_n) = 0$ ώστε $\lambda_n(N_n^c) = 0$. Θέτοντας τώρα $N = \cup_n N_n$ έχουμε $0 \le \mu(N) \le \sum_n \mu(N_n) = 0$ και $0 \le \lambda_n(N^c) \le \lambda_n(N_n^c) = 0$, άρα $\lambda_n(N^c) = 0$. Επομένως $0 \le \lambda(N^c) \le \sum_n \lambda_n(N^c) = 0$, άρα $\lambda \perp \mu$.

**Παρατήρηση** Αν συμβεί το $\nu$ να είναι πεπερασμένο, τότε το $\lambda$ είναι πεπερασμένο και $f \in L^1(X,\mu)$. Πράγματι

$$\lambda(X) + \int f d\mu = \nu(X) < +\infty \quad \text{άρα} \quad \lambda(X) < +\infty \text{ και } \int f d\mu < +\infty$$

αφού $\int f d\mu \ge 0$ και $\lambda(X) \ge 0$.

**Περίπτωση ΙΙΙ (γενική)** Το $\nu$ είναι τώρα ένα προσημασμένο μέτρο και τα $\mu$, $|\nu|$ είναι $\sigma$-πεπερασμένα. Αν $\nu = \nu_+ - \nu_-$ είναι η ανάλυση Jordan του $\nu$, τότε τα $\nu_+$, $\nu_-$ είναι $\sigma$-πεπερασμένα. Επιπλέον, αφού το $\nu$ δεν μπορεί να πάρει και τις δύο τιμές $+\infty, -\infty$, ένα από τα δύο μέτρα θα είναι πεπερασμένο. Υποθέτουμε ότι το $\nu_+$ είναι πεπερασμένο (αλλιώς, θεωρούμε το $-\nu$).

Από την Περίπτωση ΙΙ λοιπόν υπάρχουν θετικά μέτρα $\lambda_i$ $(i = 1,2)$ κάθετα προς το $\mu$ και μετρήσιμες συναρτήσεις $f_i : X \to [0,+\infty)$ ώστε

$$\nu_+(E) = \lambda_1(E) + \int_E f_1 d\mu \quad \text{και} \quad \nu_-(E) = \lambda_2(E) + \int_E f_2 d\mu \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

Εφόσον το $\nu_+$ έχει υποτεθεί πεπερασμένο, έχουμε $0 \le \lambda_1(E) < +\infty$ και $0 \le \int_E f_1 d\mu < +\infty$. Επομένως, αν ορίσουμε $\lambda(E) = \lambda_1(E) - \lambda_2(E)$ και $f = f_1 - f_2$, το $\lambda$ είναι καλά ορισμένο προσημασμένο μέτρο, η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι *ολοκληρώσιμη* συνάρτηση και $\int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \int_E f d\mu$. Επίσης, αφού τα $\lambda_i$ είναι κάθετα στο $\mu$, εύκολα φαίνεται ότι $\lambda \perp \mu$. Αφαιρώντας τις προηγούμενες ισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E) = \lambda_1(E) - \lambda_2(E) + \int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \lambda(E) + \int_E f d\mu \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

□

**Παρατήρηση 5.22 (Σύνδεση με την Συναρτησιακή Ανάλυση)** Αν $\mu$ είναι θετικό κανονικό μέτρο Borel σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο (ή γενικότερα τοπολογικό συμπαγή χώρο Hausdorff) $X$ τότε $C_c(X) \subseteq L^1(X,\mu)$ (πράγματι για κάθε $f \in C_c(X)$ έχουμε $\int |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(supp\, f) < \infty$) [5]. Επομένως αν $\nu$ είναι ένα προσημασμένο πεπερασμένο μέτρο Borel ώστε το $|\nu|$ να είναι κανονικό, κάθε $f \in C_c(X)$ ανήκει στον $L^1(|\nu|)$ άρα $f \in L^1(\nu_+)$ και $f \in L^1(\nu_-)$. Ορίζοντας λοιπόν $\phi_\nu(f) = \int f d\nu_+ - \int f d\nu_-$ έχουμε μια γραμμική μορφή στον $C_c(X)$ η οποία είναι συνεχής γιατί

$$\begin{aligned} |\phi_\nu(f)| &= \left| \int f d\nu_+ - \int f d\nu_- \right| \leq \left| \int f d\nu_+ \right| + \left| \int f d\nu_- \right| \\ &\leq \|f\|_\infty (\nu_+(X) + \nu_-(X)) = \|f\|_\infty |\nu|(X). \end{aligned}$$

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz λέει ότι όλες οι συνεχείς γραμμικές μορφές στον $(C_c(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι της μορφής $\phi_\nu$ για κατάλληλα πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα $\nu$.

**Ασκήσεις 5.23** (1) Στον μετρήσιμο χώρο $([0,1], \mathcal{M}_m)$ όπου $\mathcal{M}_m$ τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, θεωρούμε τα εξής δύο μέτρα: $m$, το μέτρο Lebesgue και $\nu$, το μέτρο απαρίθμησης. Το μέτρο $\nu$ δεν δέχεται ανάλυση Lebesgue ως προς το μέτρο $m$. Επίσης, ενώ το μέτρο $m$ είναι προφανώς απολύτως συνεχές ως προς το $\nu$, δεν υπάρχει $f \in L^1([0,1],\nu)$ ώστε $m(E) = \int_E f d\nu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}_m$.

(2) Στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, όπου $\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ αριθμήσιμο}\}$ ονομάζουμε $\mu$ το μέτρο απαρίθμησης και $\nu$ το μέτρο που ορίζεται από τις σχέσεις $\nu(E) = 0$ αν $E$ αριθμήσιμο και $\nu(E) = 1$ αν $E$ υπεραριθμήσιμο. Τότε προφανώς $\nu \ll \mu$ αλλά δεν υπάρχει μετρήσιμη $f$ ώστε $\nu(E) = \int_E f d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

**Ορισμός 5.6** *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και $\nu$ προσημασμένο μέτρο με $|\nu|$ σ-πεπερασμένο ώστε $\nu \ll \mu$, η $\mu$-σχεδόν μοναδική $f$ που ικανοποιεί τη σχέση $\nu(E) = \int_E f d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$ ονομάζεται **παράγωγος Radon-Nikodym του** $\nu$ **ως προς** $\mu$ και συμβολίζεται $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.*

**Ορισμός 5.7** *Έστω $\nu$ προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ με ανάλυση Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Για κάθε $g \in L^1(X, |\nu|)$ ορίζουμε*

$$\int g d\nu = \int g d\nu_+ - \int g d\mu_-.$$

**Πρόταση 5.24** *Αν $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \lambda$ όπου τα $\mu$ και $\lambda$ είναι θετικά μέτρα και το $\nu$ είναι προσημασμένο μέτρο (όπου τα $|\nu|$, $\mu$ και $\lambda$ είναι σ-πεπερασμένα), τότε*

*(α) για κάθε $g \in L^1(X, |\nu|)$ έχουμε $g\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L^1(X,\mu)$ και* $\displaystyle\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$

*(β) Ισχύει η ισότητα* $\dfrac{d\nu}{d\lambda} = \left(\dfrac{d\nu}{d\mu}\right)\left(\dfrac{d\mu}{d\lambda}\right)$ *λ-σχεδόν παντού.*

[5] Το σύνολο $supp\, f$, ο φορέας της $f$, είναι η κλειστή θήκη του $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Είναι συμπαγές αφού $f \in C_c(X)$, οπότε έχει πεπερασμένο μέτρο.