Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι
Πρόχειρες Περιληπτικές Σημειώσεις

Α. Κ.

1 σ-Άλγεβρες

Ορισμός 1.1 *Έστω X μη κενό σύνολο*[1].

Άλγεβρα *$\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ κλειστή ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες τομές.*

*Μία **σ-άλγεβρα** είναι μια άλγεβρα που είναι κλειστή ως προς* αριθμήσιμες τομές.

Παρατηρήσεις 1.1 *Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, τότε $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{A}$.*

Επίσης η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Αν μια $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα, είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις.

Άσκηση 1.2 Αν μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς ξένες αριθμήσιμες ενώσεις, τότε είναι σ-άλγεβρα. Το ίδιο συμπέρασμα έπεται αν είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις.

Παραδείγματα 1.3 *(α) Οι οικογένειες $\{\emptyset, X\}$ και $\mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρες.*

(β) Αν το X είναι άπειρο τότε

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ πεπερασμένο ή } E^c \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι άλγεβρα, αλλά όχι σ-άλγεβρα.

(γ) Αν το X είναι υπεραριθμήσιμο τότε

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Η τομή μιάς οποιασδήποτε οικογένειας σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα.

Κάθε $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ περιέχεται σε μια σ-άλγεβρα, την $\mathcal{P}(X)$. Επομένως η τομή $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{E}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που την περιέχει.

Ορισμός 1.2 *Η $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ονομάζεται **η σ-άλγεβρα που παράγεται από την** $\mathcal{E}$.*

[1] μετρο, 16/11/08

Παρατηρήσεις 1.4 Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ τότε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ και $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}$.

Ορισμός 1.3 *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος, η σ-αλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα ονομάζεται **η σ-άλγεβρα Borel** του X και συμβολίζεται $\mathcal{B}_X$.*

Περιέχει:

όλα τα ανοικτά σύνολα

όλα τα κλειστά σύνολα

όλες τις αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα σύνολα G_δ)

όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα σύνολα F_σ)

όλες τις αριθμήσιμες τομές F_σ συνόλων: τα σύνολα $F_{\sigma\delta}$

όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις G_δ συνόλων: τα σύνολα $G_{\delta\sigma}$

κ.λπ. κ.λπ.

Πρόταση 1.5 *Η σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ παράγεται από οποιανδήποτε από τις παρακάτω οικογένειες:*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\} & \mathcal{E}_5 = \{[a,b) : a < b\} \\ \mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\} & \mathcal{E}_6 = \{(a,b] : a < b\} \\ \mathcal{E}_3 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} & \mathcal{E}_7 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{E}_4 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\} & \mathcal{E}_8 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Ορισμός 1.4 *Μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται **στοιχειώδης οικογένεια** αν*

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- $E, F \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; E \cap F \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; E^c$ *είναι πεπερασμένη ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$.*

Παράδειγμα 1.6 $\mathcal{E} = \{(a,b] : a \leq b\} \cup \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. *Είναι μια στοιχειώδης οικογένεια.*

Πρόταση 1.7 *Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι στοιχειώδης οικογένεια τότε η οικογένεια $\mathcal{A}$ όλων των πεπερασμένων ενώσεων $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ ξένων συνόλων $\{E_1, \ldots, E_n\} \subseteq \mathcal{E}$ είναι άλγεβρα.*

Απόδειξη (περίληψη) **1.** Αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \setminus F \in \mathcal{A}$.

2. Αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \cup F \in \mathcal{A}$.

3. Αν $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ τότε $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}$.

4. Αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

5. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$.

2 Μέτρα

Ορισμός 2.1 (α) *Αν X είναι μη κενό σύνολο και $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του, το ζεύγος $(X, \mathcal{M})$ λέγεται* **μετρήσιμος χώρος**.

(β) Μέτρο *στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ λέγεται μια απεικόνιση*

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

με τις ιδιότητες

$$\mu(\emptyset) = 0$$
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad \text{όταν } E_n \in \mathcal{M} \text{ είναι ξένα ανά δύο (σ-προσθετικότητα).}$$

Παρατήρηση 2.1 *Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ που ικανοποιεί $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(E \cup F) = \mu(E) \cup \mu(F)$όταν $E, F \in \mathcal{M}$ είναι ξένα λέγεται* πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Ορισμός 2.2 *Ένα μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ λέγεται*

- **πεπερασμένο** *αν $\mu(X) < \infty$*
- *σ-***πεπερασμένο** *αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ όπου $X_n \in \mathcal{M}$ και $\mu(X_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- **ημιπεπερασμένο** *(semifinite) αν κάθε $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) = +\infty$ περιέχει $F \in \mathcal{M}$ με $0 < \mu(E) < \infty$.*

Παρατηρήσεις 2.2 *(α) Από την επόμενη Πρόταση 2.3 (α) έπεται ότι αν το μ είναι πεπερασμένο τότε για κάθε $E \in \mathcal{M}$ ισχύει $\mu(E) < \infty$.*

(β) Επίσης έπεται ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο τότε όλα τα $E \in \mathcal{M}$ έχουν «σ-πεπερασμένο μέτρο».

Πρόταση 2.3 (Βασικές ιδιότητες του μέτρου)
(α) (Μονοτονία) *Αν $E, F \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq F$ τότε $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

(β) (σ-Υποπροσθετικότητα) *Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.*

(γ) *Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ και $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n)$.*

(δ) *Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$, αν $E_n \supseteq E_{n+1}$ για κάθε n και αν $\mu(E_1) < \infty$ τότε $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n)$.*

Υπενθύμιση Αν $\{a_i : i \in I\} \subseteq [0, +\infty]$, ορίζουμε

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i \in F} a_i : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\right\} \in [0, +\infty].$$

Όταν $I = \mathbb{N}$ και $a_i \in \mathbb{R}$, ο ορισμός συμπίπτει με τον συνηθισμένο ορισμό του αθροίσματος μιας σειράς *μη αρνητικών* όρων.

Παράδειγμα 2.4 *Έστω X μη κενό σύνολο και $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε $\mu_f : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ από τη σχέση*

$$\mu_f(E) = \sum_{x \in E} f(x).$$

Ειδικές περιπτώσεις: (α) Αν $f(x) = 1$ για κάθε $x \in X$, τότε $\mu_f(E) = \#E$ (ο πληθάριθμος του E): το μ_f είναι το μέτρο απαρίθμησης (counting measure).

(β) Έστω $x_o \in X$ και $f : X \to [0, +\infty]$ η συνάρτηση όπου $f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_o \\ 0, & x \neq x_o \end{cases}$. Τότε $\mu_f(E) = \begin{cases} 1, & x_o \in E \\ 0, & x_o \notin E \end{cases}$. Το μ_f είναι το ***μέτρο Dirac*** *δ_{x_o} στο x_o.*

Παρατηρήσεις 2.5 **(α)** Το μ_f είναι ημιπεπερασμένο αν και μόνον αν $f(X) \subseteq [0, +\infty)$.
(β) Το μ_f είναι σ-πεπερασμένο αν και μόνον αν είναι ημιπεπερασμένο και το σύνολο $\{x \in X : f(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

2.1 Μηδενικά σύνολα, πλήρωση

Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $N \in \mathcal{M}$ και $\mu(N) = 0$ τότε το N λέγεται μ-μηδενικό σύνολο.

Ορισμός 2.3 *Μια ιδιότητα $P(x)$ που αναφέρεται σε στοιχεία $x \in X$ λέγεται ότι ισχύει μ-σχεδόν παντού αν ισχύει εκτός από ένα μηδενικό σύνολο, δηλ. αν υπάρχει ένα μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{M}$ ώστε η $P(x)$ να ισχύει για κάθε $x \notin N$, ή ισοδύναμα, αν το σύνολο των $x \in X$ για τα οποία η $P(x)$ δεν ισχύει* περιέχεται *σε ένα μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{M}$.*

Παρατηρήσεις 2.6 Αν N_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενικά σύνολα τότε το $\cup_n N_n$ είναι μηδενικό σύνολο. Επίσης αν N είναι μηδενικό σύνολο και $F \in \mathcal{M}$, $E \subseteq N$, τότε το F είναι μηδενικό σύνολο.

Όμως, αν N είναι μηδενικό σύνολο και $E \subseteq N$ δεν έπεται ότι $E \in \mathcal{M}$.

Για παράδειγμα αν $X = [0, 1]$ και $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα του Παραδείγματος 1.3(γ), έστω $E = [0, 1/2]$ και $x_o = 3/4$. Θεωρούμε τον $(X, \mathcal{M}, \delta_{x_o})$. Αν $N \equiv \{x_o\}^c$ τότε $N \in \mathcal{M}$, $\delta_{x_o}(N) = 0$ και $E \subseteq N$ αλλά $E \notin \mathcal{M}$.

Ορισμός 2.4 *Ένα μέτρο (ή ένας χώρος μέτρου) λέγεται* **πλήρες** *(αντ. πλήρης) αν κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.*

Θεώρημα 2.7 (Πλήρωση) *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και*

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\} \\ \overline{\mathcal{N}} &= \{F \subseteq X : \exists N \in \mathcal{N} \text{ ώστε } F \subseteq N\} \\ \overline{\mathcal{M}} &= \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \in \overline{\mathcal{N}}\}. \end{aligned}$$

Τότε η $\overline{\mathcal{M}}$ είναι σ-άλγεβρα, και αν θέσουμε

$$\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E), \quad E \in \mathcal{M}, F \in \overline{\mathcal{N}}$$

τότε το $\bar{\mu}$ είναι καλά ορισμένο μέτρο στην $\overline{\mathcal{M}}$ ώστε $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.

Ο χώρος μέτρου $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ είναι πλήρης και το $\bar{\mu}$ είναι μοναδικό, με την έννοια ότι αν ν είναι πλήρες μέτρο στην $\overline{\mathcal{M}}$ ώστε $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$ τότε $\nu = \bar{\mu}$.

Απόδειξη Παραλείπεται.

2.2 Εξωτερικά μέτρα και μέτρα

Ορισμός 2.5 *Έστω $\Omega \neq \emptyset$. Μια συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ λέγεται* **εξωτερικό μέτρο** *αν*

(α) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(β) *(σ-υποπροσθετικότητα) αν $A_n \subseteq \Omega$ τότε $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$*
(γ) *(μονοτονία) αν $A \subseteq B$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

Παρατήρηση 2.8 *Σύγκριση με την έννοια του μέτρου:*

(ι) Ένα εξωτερικό μέτρο ορίζεται σ'ολόκληρο το δυναμοσύνολο

(ιι) δεν είναι όμως κατ'ανάγκη (ούτε πεπερασμένα) προσθετικό, αλλά μόνο σ-υποπροσθετικό.

Πρόταση 2.9 *Έστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ μια οικογένεια ώστε $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$ και έστω $\psi : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση με $\psi(\emptyset) = 0$. Αν $A \subseteq \Omega$, ορίζουμε*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi(E_n) : E_n \in \mathcal{B},\ A \subseteq \bigcup_n E_n \right\}.$$

Τότε το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

Παράδειγμα 2.10 *Στον $\Omega = \mathbb{R}^d$, ορίζω*

$$(a, b) = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, d\} \text{ (ανοικτό παραλληλεπίπεδο).}$$

Θέτω $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a_i < b_i\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^3\}$

και $\psi((a, b)) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_d - a_d)$, $\psi(\emptyset) = 0$, $\psi(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Το εξωτερικό μέτρο που προκύπτει στο $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ είναι το ***εξωτερικό μέτρο Lebesgue****.*

Παρατήρηση 2.11 Έστω $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο και $B \subseteq \Omega$. Από την υποπροσθετικότητα έχουμε $\phi(\Omega) = \phi(B \cup B^c) \leq \phi(B) + \phi(B^c)$, άρα «στην καλύτερη περίπτωση» θα ισχύει η ισότητα $\phi(B \cup B^c) = \phi(B) + \phi(B^c)$: το B τότε «κόβει καλά» το Ω. Μάλιστα για οποιοδήποτε $A \subseteq \Omega$ έχουμε $\phi(A) \leq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c)$. Τα μετρήσιμα σύνολα είναι εκείνα τα B που «κόβουν καλά» κάθε σύνολο A:

Ορισμός 2.6 *Έστω $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο. Ένα $B \subseteq \Omega$ λέγεται ϕ-**μετρήσιμο** αν*

$$\text{για } \textbf{\textit{κάθε}}\ A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \mathcal{M}_\phi = \{B \subseteq \Omega : \ B\ \phi\text{-μετρήσιμο}\}.$$

Παρατήρηση 2.12 *Έστω $B \subseteq \Omega$.*

- *Αν $\phi(B) = 0$, τότε $B \in \mathcal{M}_\phi$.*
- *Για να δείξω ότι $B \in \mathcal{M}_\phi$, αρκεί να δείξω ότι*

$$\text{για κάθε } A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) \geq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

- *Μάλιστα αρκεί να δείξω την ανισότητα αυτή για κάθε A με $\phi(A) < \infty$.*

Θεώρημα 2.13 (Καραθεοδωρή) *Αν ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο Ω, τότε*

- *Η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και*
- *Το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι πλήρες μέτρο.*

Βήματα απόδειξης:

1. Η $\mathcal{M}_\phi$ είναι άλγεβρα.
2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned} &\phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2) \\ &\text{άρα} \quad \phi(B_1 \cup B_2) = \phi(B_1) + \phi(B_2) \end{aligned}$$

   οπότε το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι πεπερασμένα προσθετικό.

3. Αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο, τότε
   - $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}_\phi$ και
   - $\phi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \phi(B_n)$

   οπότε η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Επομένως ο χώρος $(\Omega, \mathcal{M}_\phi, \phi|_{\mathcal{M}_\phi})$ είναι χώρος μέτρου. Ότι είναι πλήρης έπεται τώρα από την Παρατήρηση 2.12.

Βήμα 1. **(α)** $\Omega \in \mathcal{M}_\phi$: προφανές.

(β) Αν $B \in \mathcal{M}_\phi$, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) \\ &= \phi(A \cap C^c) + \phi(A \cap C) \quad (\text{όπου } \; C = B^c) \end{aligned}$$

άρα $B^c \in \mathcal{M}_\phi$.

(γ) Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$, να δείξω ότι $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_\phi$: Έστω $A \subseteq \Omega$. Επειδή $B_1 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(A) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_1^c). \tag{1}$$

Επειδή $B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(A \cap B_1^c) = \phi((A \cap B_1^c) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1^c) \cap B_2^c) \tag{2}$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi(A\cap B_1)+\phi((A\cap B_1^c)\cap B_2)+\phi(A\cap B_1^c\cap B_2^c)\\ &= \phi(A\cap B_1)+\phi((A\cap B_1^c)\cap B_2)+\phi(A\cap (B_1\cup B_2)^c). \qquad (3)\end{aligned}$$

Αλλά $A\cap(B_1\cup B_2)=(A\cap B_1)\cup(A\cap(B_2\cap B_1^c))$ άρα, αφού το ϕ είναι υποπροσθετικό, $\phi(A\cap(B_1\cup B_2))\le\phi(A\cap B_1)+\phi(A\cap(B_2\cap B_1^c))$, οπότε από την (3) έχουμε

$$\phi(A) \ \ge\ \phi(A\cap(B_1\cup B_2))+\phi(A\cap(B_1\cup B_2)^c) \qquad (4)$$

άρα $(B_1\cup B_2)\in\mathcal{M}_\phi$.

Βήμα 2. Αν $B_1,B_2\in\mathcal{M}_\phi$, και $B_1\cap B_2=\emptyset$, τότε $(B_1\cup B_2)\cap B_1=B_1$ και $(B_1\cup B_2)\cap B_1^c=B_2$, οπότε για κάθε $A\subseteq\Omega$, θέτοντας $C=A\cap(B_1\cup B_2)$ έχουμε, αφού $B_1\in\mathcal{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}\phi(A\cap(B_1\cup B_2)) &= \phi(C)=\phi(C\cap B_1)+\phi(C\cap B_1^c)\\ &= \phi(A\cap(B_1\cup B_2)\cap B_1)+\phi(A\cap(B_1\cup B_2)\cap B_1^c)\\ &= \phi(A\cap B_1)+\phi(A\cap B_2).\end{aligned}$$

Βήμα 3. Αν $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο και $B=\cup_n B_n$, θα δείξω ότι για κάθε $A\subseteq\Omega$,

$$\phi(A)=\phi(A\cap B)+\phi(A\cap B^c)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A\cap B_n)+\phi(A\cap B^c) \qquad (5)$$

οπότε

$$\phi(A)=\phi(A\cap B)+\phi(A\cap B^c)$$

άρα $B\in\mathcal{M}_\phi$ και (θέτοντας $A=B$)

$$\phi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(B_n)$$

άρα το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Πράγματι, για κάθε $N\in\mathbb{N}$, επειδή $\bigcup_{n=1}^N B_n\in\mathcal{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)\right)+\phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)^c\right)\\ &= \sum_{n=1}^N\phi(A\cap B_n)+\phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)^c\right) \quad \text{(Βήμα 2)}\\ &\ge \sum_{n=1}^N\phi(A\cap B_n)+\phi\left(A\cap B^c\right)\end{aligned}$$

διότι $A\cap B^c\subseteq A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)^c$. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $N\in\mathbb{N}$, έχουμε

$$\phi(A)\ge\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A\cap B_n)+\phi\left(A\cap B^c\right)\ge\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\right)+\phi\left(A\cap B^c\right)$$

λόγω της σ-υποπροσθετικότητας του ϕ. Αλλά $\bigcup_n (A \cap B_n) = A \cap (\bigcup_n B_n) = A \cap B$, άρα

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)\right) + \phi\left(A \cap B^c\right) = \phi(A \cap B) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A)$$

πάλι από την υποπροσθετικότητα. Δηλαδή

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A \cap B) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A)$$

συνεπώς ισχύει ισότητα, και η (5) αποδείχθηκε. $\square$

Ορισμός 2.7 *Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται* ***προμέτρο*** *αν*
(α) *Το πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$ του μ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X*
(β) $\mu(\emptyset) = 0$
(γ) *Αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ είναι ξένα ανα δύο και ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Δηλ. το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό, και «όταν μπορεί» είναι σ-προσθετικό.

Θεώρημα 2.14 (Επέκτασης Καραθεοδωρή) *Έστω $\mu_o : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα προμέτρο και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Αν $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, θέτουμε $\mu(E) = \mu^*(E)$.*

Τότε το $\mu : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ που παράγει η $\mathcal{A}$ και επεκτείνει το μ_o.

Η επέκταση αυτή είναι μοναδική όταν το μ_o είναι πεπερασμένο ($\mu_o(X) < \infty$) ή σ-πεπερασμένο ($X = \cup_n A_n$ όπου $A_n \in \mathcal{A}$ και $\mu_o(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Γενικά, κάθε επέκταση $\nu : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ του μ ικανοποιεί $\nu(E) \leq \mu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και, αν $\mu(E) < \infty$, τότε $\nu(E) = \mu(E)$.

Βήματα απόδειξης Βήμα 1 Δείχνουμε ότι $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_o$.

Βήμα 2 Δείχνουμε ότι κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μ^*-μετρήσιμο.

Κατά συνέπεια, αν $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ και αν $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$, τότε ο $(X, \mathcal{M}(\mathcal{A}), \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Βήμα 3 Εύκολα προκύπτει ότι αν $\nu : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο που επεκτείνει το μ τότε $\nu(E) \leq \mu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Βήμα 4 Δείχνουμε ότι, αν ν είναι όπως στο Βήμα 3 και $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ με $\mu(E) < \infty$, τότε $\mu(E) = \nu(E)$.

Βήμα 5 Εύκολα προκύπτει ότι αν ν είναι όπως στο Βήμα 3 και το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο τότε $\nu = \mu$.

2.3 Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$

Θεώρημα 2.15 *Αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ_F στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \leq b$.*

Αν $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής και $\mu_F = \mu_G$ τότε η διαφορά $F - G$ είναι σταθερή.

Τέλος αν μ είναι μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu((a,b]) < \infty$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \le b$ τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mu((x,0]), & x < 0 \end{cases}$$

είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής και $\mu_F = \mu$.

[Για την απόδειξη του πρώτου μέρους, δες το αρχείο `metraborel.pdf`.]

Ορισμός 2.8 *Έστω X τοπολογικός (ή μετρικός) χώρος, $\mathcal{S}$ μια σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά (άρα και τα Borel). Ένα μέτρο μ στον $(X, \mathcal{S})$ λέγεται **κανονικό** αν*

(ι) *Για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές ισχύει $\mu(K) < \infty$.*

(ιι) Εξωτερική κανονικότητα:
Για κάθε $A \in \mathcal{S}$ ισχύει $\quad \mu(A) = \inf\{\mu(V) : V \text{ ανοικτό, } A \subseteq V\}$

(ιιι) Εσωτερική κανονικότητα:
Για κάθε $V \subseteq X$ ανοικτό ισχύει $\quad \mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές, } K \subseteq V\}$.

Πρόταση 2.16 *Κάθε μέτρο Borel μ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu((a,b]) < \infty$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \le b$ είναι κανονικό. Μάλιστα η ισότητα*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές, } K \subseteq E\}$$

ισχύει για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ (και όχι μόνο για τα ανοικτά).

Παρατήρηση 2.17 *Κάθε τέτοιο μέτρο ικανοποιεί, για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n]) : \; E \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n]\right\}$$

Λήμμα 2.18 *Κάθε τέτοιο μέτρο ικανοποιεί, για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n)) : \; E \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)\right\}$$

Πρόταση 2.19 *Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $E \subseteq \mathbb{R}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) το E είναι μ-μετρήσιμο

(β) Υπάρχει G_δ-σύνολο V και μ-μηδενικό σύνολο N ώστε $E = V \setminus N$.

(γ) Υπάρχει F_σ-σύνολο H και μ-μηδενικό σύνολο M ώστε $E = H \cup M$.

Πρόταση 2.20 *Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μ-μετρήσιμο με $\mu(E) < \infty$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι πεπερασμένη ένωση ανοικτών διαστημάτων ώστε $\mu(E \triangle A) < \epsilon$.*

Παρατήρηση 2.21 *Το* ***μέτρο Lebesgue*** *στον* $\mathbb{R}$ *(βλ. Παράδειγμα 2.10) είναι το μέτρο* $\lambda = \mu_F$ *όπου* $F(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.22 *Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις* $f_c : t \to t+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.23 *Αν* μ *είναι ένα μέτρο Borel στο* $\mathbb{R}$ *που είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις και πεπερασμένο στα συμπαγή σύνολα τότε είναι πολλαπλάσιο του μέτρου Lebesgue, δηλαδή υπάρχει* $a \geq 0$ *ώστε* $\mu = a\lambda$.

Απόδειξη Έστω $a = \mu([0,1))$. Το a είναι πεπερασμένο εφόσον $\mu([0,1)) \leq \mu([0,1])$ και το $[0,1]$ είναι συμπαγές.

Αν $a = 0$ τότε $\mu = 0$ γιατί $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(I_n)$ όπου $I_n = [n, n+1)$ άρα $\mu(I_n) = a = 0$.

Αν $a > 0$, θέτουμε $\nu(A) = \frac{1}{a}\mu(A)$ και θα δείξουμε ότι $\nu = \lambda$. Αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι $\nu((a,b)) = \lambda((a,b))$ για κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a,b).

Για κάθε n, θέτουμε $D_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. Θα δείξουμε ότι $\nu(D_{n,k}) = \frac{1}{2^n}$. Πράγματι, επειδή $D_{n,k} = D_{n,1} + (k-1)$ έχουμε $\nu(D_{n,k}) = \nu(D_{n,1}) \equiv \nu_n$ και επειδή $D_{n,k} \cap D_{n,j} = \emptyset$ όταν $k \neq j$ έχουμε

$$[0,1) = \bigcup_{k=1}^{2^n} D_{n,k} \Longrightarrow \nu([0,1)) = \sum_{k=1}^{2^n} \nu(D_{n,k}) = 2^n \nu_n$$

άρα $\nu_n = \frac{1}{2^n} = \lambda(D_{n,k})$, δηλαδή τα μέτρα ν και λ ταυτίζονται στα διαστήματα της μορφής $D_{n,k}$. Όμως κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a,b) είναι αριθμήσιμη ένωση τέτοιων διαστημάτων[2], άρα τα μέτρα ν και λ ταυτίζονται στα φραγμένα ανοικτά διαστήματα, άρα παντού.
$\square$

2.4 Το σύνολο Cantor

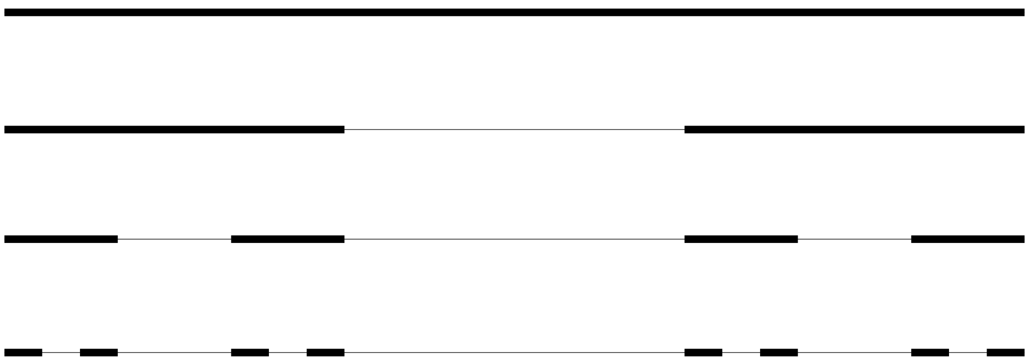
Έστω

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= \qquad \left[0, \frac{1}{3}\right] \qquad \bigcup \qquad \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C &= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.
\end{aligned}$$

Δηλαδή στο n-οστό στάδιο έχουμε ένα σύνολο C_n που είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων και αφαιρούμε από κάθε κλειστό διάστημα I του C_n το ανοικτό διάστημα με κέντρο το μέσο του I και μήκος ίσο με $1/3$ του μήκος του I.

---

[2] Υπάρχουν γνησίως μονότονες ακολουθίες δυαδικών ρητών (p_n) και (q_n) ώστε $p_n \searrow a$ και $q_n \nearrow b$, οπότε $(a,b) = \cup_n [p_n, q_n)$ και κάθε διάστημα $[p_n, q_n)$ είναι της μορφής $[\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^m}) = [\frac{2^m p}{2^{n+m}}, \frac{2^n q}{2^{n+m}})$, είναι δηλαδή πεπερασμένη ένωση διαστημάτων της μορφής $D(n+m,k)$.



Παρατήρηση 2.24 *Το σύνολο Cantor είναι «μετροθεωρητικά και τοπολογικά αμελητέο», δηλαδή έχει μέτρο Lebesgue μηδέν και είναι κλειστό και πουθενά πυκνό. Είναι όμως υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη (α) Κάθε C_n είναι ένωση 2^n ξένων κλειστών διαστημάτων με μήκος $(\frac{1}{3})^n$ το καθένα, άρα $\lambda(C_n) = 2^n(\frac{1}{3})^n$. Έπεται ότι $\lambda(C) = \lim_n \lambda(C_n) = 0$.

(β) Το C είναι κλειστό (τομή των κλειστών συνόλων C_n) και πουθενά πυκνό: Αν I είναι ανοικτό διάστημα που περιέχεται στο C, τότε $\lambda(I) \leq \lambda(C) = 0$, και συνεπώς $I = \emptyset$.

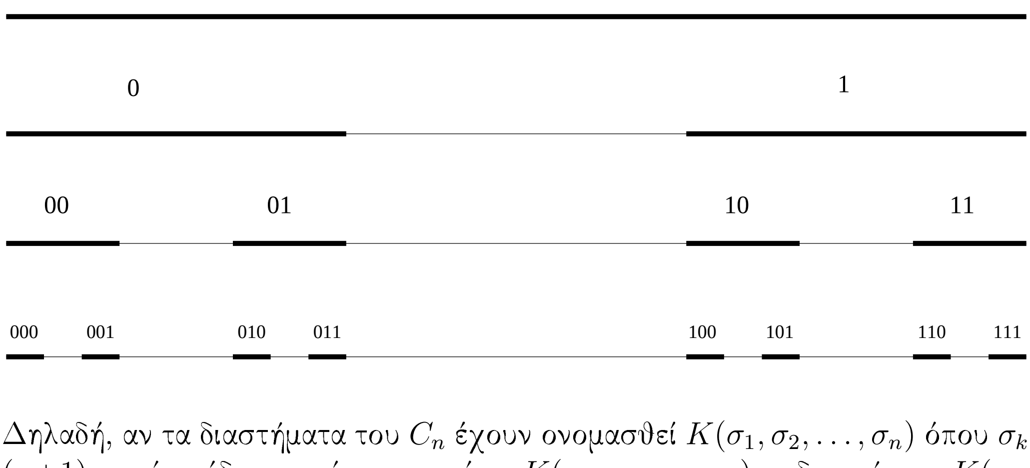
(γ) Θα δείξουμε τέλος ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο. Θα κατασκευάσουμε μια 1-1 συνάρτηση που θα απεικονίζει το σύνολο

$$\Omega = \{(\sigma_n) : \sigma_n \in \{0,1\}\}$$

επί του C. Αυτό αρκεί, αφού το Ω είναι υπεραριθμήσιμο.

Δίνουμε διαδοχικά δείκτες στα κλειστά διαστήματα του κάθε C_n ως εξής:

$$\begin{array}{llll} C_1: & [0,\frac{1}{3}] = K(0), & & [\frac{2}{3},1] = K(1) \\ C_2: & [0,\frac{1}{9}] = K(00),\ [\frac{2}{9},\frac{3}{9}] = K(01), & & [\frac{6}{9},\frac{7}{9}] = K(10),\ [\frac{8}{9},1] = K(11) \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{array}$$



Δηλαδή, αν τα διαστήματα του C_n έχουν ονομασθεί $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ όπου $\sigma_k \in \{0,1\}$, στο $(n+1)$-οστό στάδιο προκύπτουν από το $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ τα διαστήματα $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, 0)$ και $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, 1)$ του C_{n+1}. Επομένως, κάθε άπειρη ακολουθία $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots) \in \Omega$ καθορίζει μια μοναδική φθίνουσα ακολουθία $K(\sigma_1), K(\sigma_1, \sigma_2), \ldots, K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \ldots$ από συμπαγή διαστήματα. Έπεται (λόγω συμπάγειας) ότι η τομή $K_\sigma \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ δεν είναι κενή, και εφόσον $\operatorname{diam} K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 3^{-n} \to 0$, το K_σ είναι μονοσύνολο. Ονομάζουμε $f(\sigma)$ το μοναδικό στοιχείο του K_σ, δηλαδή $K_\sigma = \{f(c)\}$.

Δεν είναι δύσκολο να βεβαιωθεί κανείς ότι η $\sigma \to f(\sigma)$ είναι 1-1 και επί:

Αν $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots) \neq \tau = (\tau_1,\tau_2,\ldots)$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma_n \neq \tau_n$ οπότε τα σύνολα $K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ και $K(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ είναι ξένα. Αλλά $f(\sigma) \in K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ και $f(\tau) \in K(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ άρα $f(\sigma) \neq f(\tau)$.

Επίσης αν $x \in C = \cap_n C_n$ τότε για κάθε n το x ανήκει σε ένα και μοναδικό $K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$. Άρα το x ανήκει στην τομή $\bigcap_n K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = K_\sigma = \{f(\sigma)\}$ οπότε υπάρχει $\sigma \in \Omega$ ώστε $x = f(\sigma)$.

Παρατήρηση 2.25 *Το σύνολο Cantor είναι τέλειο, δηλαδή είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι όριο μιας ακολουθίας (x_n) σημείων του C δαφορετικών από το x.

Για κάθε n, το σημείο x περιέχεται σε ένα μοναδικό $K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$. Αν το x είναι το αριστερό άκρο του $K(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n_0})$, ονομάζουμε x_n το δεξιό άκρο· αν όχι, ονομάζουμε x_n το αριστερό άκρο. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε $0 < |x - x_n| \leq (\frac{1}{3})^n$. $\square$

Παρατήρηση 2.26 *Για κάθε $a \in (0,1)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor» C^a με μέτρο a.*

Κατασκευή Ξεκινάμε από το $C_0 = [0,1]$, αλλά αντί να αφαιρέσουμε ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{1}{3}$ με κέντρο το μέσον του, αφαιρούμε ένα ανοικτό διάστημα $(\frac{1}{2} - \frac{b}{4}, \frac{1}{2} + \frac{b}{4})$ μήκους $\frac{b}{2}$ (όπου $b = 1 - a$). Προκύπτουν δύο κλειστά διαστήματα μήκους $\frac{1}{2}(1 - \frac{b}{2})$. Από το καθένα αφαιρούμε ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{b}{8}$ με κέντρο το μέσον του, και προκύπτουν τέσσερα διαστήματα μήκους $\frac{1}{4}(1 - \frac{b}{2} - \frac{b}{4})$ το καθένα, και ούτω καθεξής. Έτσι στο n-οστό στάδιο αφαιρούμε, με κέντρο το μέσον κάθε διαστήματος του C^a_{n-1}, ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{b}{2^{2n-1}}$. Έπεται ότι

$$\lambda([0,1] \setminus C^a) = \frac{b}{2} + 2\frac{b}{8} + 2^2\frac{b}{2^4} + \ldots = b, \text{ άρα } \lambda(C^a) = a.$$

Το C^a είναι κλειστό και πουθενά πυκνό. Πράγματι, αν I είναι ένα ανοικτό διάστημα που περιέχεται στο C^a, τότε για κάθε n θα περιέχεται στο C^a_n. Αλλά, επειδή $\lambda(C^a_n) < 1$, καθένα από τα 2^n κλειστά ξένα διαστήματα που αποτελούν το C^a_n έχει μήκος μικρότερο από $\frac{1}{2^n}$. Κατά συνέπεια $\lambda(I) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε n, οπότε $\lambda(I) = 0$ άρα $I = \emptyset$. Άρα το C^a δεν μπορεί να περιέχει μη κενά ανοικτά διαστήματα.

Επίσης το C^a είναι τέλειο. Η απόδειξη είναι η ίδια με την περίπτωση του C.

Η ιδιάζουσα συνάρτηση του Lebesgue Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $\phi : [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα, συνεχή και επί, που είναι τοπικά σταθερή στο συμπλήρωμα $C^c = [0,1] \setminus C$ του συνόλου Cantor C.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται και «κλίμακα σου διαβόλου» γιατί ανεβαίνει «κλιμακωτά» από το $0\,(\phi(0) = 0)$ στο $1\,(\phi(1) = 1)$ και είναι τοπικά σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα του C^c, επομένως είναι παραγωγίσιμη σε κάθε τέτοιο διάστημα με παράγωγο ίση με 0! Δηλαδή, η ϕ είναι *σχεδόν παντου παραγωγίσιμη* με $\phi'(t) = 0$ για κάθε t στο (πυκνό) σύνολο C^c, ενώ $\phi(0) = 0$ και $\phi(1) = 1$.

Κατασκευή Η ϕ θα ορισθεί πρώτα στο C^c. Στο πρώτο στάδιο από το $C_0 = [0,1]$ αφαιρούμε το «μεσαίο τρίτο» ανοικτό διάστημα: $C_0 \setminus C_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Στο διάστημα αυτό ορίζουμε την ϕ να είναι σταθερά ίση με $\frac{1}{2}$.

$$\phi(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Στο δεύτερο στάδιο αφαιρούμε από καθένα από τα δύο διαστήματα του C_1 το «μεσαίο τρίτο» διάστημα: το σύνολο $C_1 \setminus C_2 = I_1^2 \cup I_2^2$, είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών διαστημάτων πλάτους $\frac{1}{9}$ το καθένα: $I_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Θέτουμε

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & t \in I_1^2 \\ \frac{3}{4}, & t \in I_2^2 \end{cases}$$

Στο n-οστό στάδιο, αφαιρούμε από καθένα από τα διαστήματα του C_{n-1} το «μεσαίο τρίτο» διάστημα: το σύνολο $C_{n-1} \setminus C_n$ είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανοικτών διαστημάτων. Τα αριθμούμε $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{2^{n-1}}^n$ από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή αν $t \in I_{k-1}^n$ και $s \in I_k^n$ τότε $t < s$. Θέτουμε

$$\phi(t) = \frac{2i-1}{2^n} \ \text{ όταν } \ t \in I_i^n,$$

δηλαδή

$$\phi(t) = \begin{cases} 2^{-n}, & t \in I_1^n \\ 3 \cdot 2^{-n}, & t \in I_2^n \\ \vdots & \\ 1 - 2^{-n}, & t \in I_{2^{n-1}}^n \end{cases}$$

Έτσι ορίζεται η ϕ στο ανοικτό σύνολο C^c.[3] Για να ορίσουμε την ϕ στο C, θέτουμε $\phi(0) = 0$ και για κάθε $t \in C \setminus \{0\}$,

$$\phi(t) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t\}.$$

Ισχυρισμός 1: Η ϕ είναι αύξουσα:

$$(a) \qquad s_1, s_2 \in C^c, \quad s_1 < s_2 \Rightarrow \phi(s_1) \leq \phi(s_2).$$

Αυτό είναι φανερό από τον ορισμό της ϕ στο C^c: διότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $j, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ ώστε $s_1 \in I_j^n$ και $s_2 \in I_k^n$, άρα $\phi(s_1) = \frac{2j-1}{2^n}$ και $\phi(s_2) = \frac{2k-1}{2^n}$. Αλλά $j \leq k$ αφού $s_1 < s_2$, άρα $\phi(s_1) \leq \phi(s_2)$.

$$(b) \qquad t_1, t_2 \in C, \quad t_1 < t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2)$$

διότι $\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \subseteq \{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\}$, άρα $\sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \leq \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\}$.

$$(c) \qquad t_1 \in C, s_2 \in C^c, \quad t_1 < s_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(s_2)$$

[3] Ήδη βλέπουμε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο C^c με παράγωγο ίση με 0.

διότι για κάθε $s \in C^c$ με $s < t_1$ έχουμε $s < s_2$ άρα $\phi(s) \leq \phi(s_2)$ από το (a), άρα $\phi(t_1) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \leq \phi(s_2)$.

$$(d) \qquad s_1 \in C^c, t_2 \in C, \quad s_1 < t_2 \Rightarrow \phi(s_1) \leq \phi(t_2)$$

διότι $s_1 \in \{s \in C^c : s < t_2\}$ άρα $\phi(s_1) \leq \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\} = \phi(t_2)$.

Παρατήρηση Το σύνολο $\phi(C^c) = \{\frac{2i-1}{2^n} : i = 1, \dots 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ περιέχει όλους τους δυαδικούς ρητούς, άρα είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

Ισχυρισμός 2: Η ϕ είναι συνεχής:

Έστω ότι η ϕ είναι ασυνεχής σε κάποιο $x \in (0, 1)$. Επειδή η ϕ είναι αύξουσα, τα πλευρικά όρια υπάρχουν, και αφού είναι ασυνεχής, είναι διαφορετικά. Δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(\phi(x_-), \phi(x_+))$ δεν είναι κενό, και δεν μπορεί να περιέχει καμμιά τιμή της ϕ, εκτός πιθανώς από την τιμή $\phi(x)$. Δηλαδή υπάρχει κάποιο ανοικτό μη κενό σύνολο[4] που δεν τέμνει το $\phi([0, 1])$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την Παρατήρηση. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ϕ είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1.

Ισχυρισμός 3: Η ϕ είναι επί:

Αυτό είναι τώρα άμεσο από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, αφού η ϕ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παίρνει της τιμές 0 (εξ ορισμού) και 1 (διότι $\phi(1) = \sup\{\frac{2i-1}{2^n} : i = 1, \dots 2^n, n \in \mathbb{N}\} = 1$).

Η δεξιά αντίστροφη της ϕ: Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{gathered} \psi : [0, 1] \to [0, 1] \\ \psi(s) = \inf\{t \in [0, 1] : \phi(t) = s\} = \inf \phi^{-1}(\{s\}). \end{gathered}$$

Παρατηρούμε ότι αφού η ϕ είναι επί, για κάθε $s \in [0, 1]$ το σύνολο $\phi^{-1}(\{s\}) \subseteq [0, 1]$ δεν είναι κενό, άρα $\psi(s) \in [0, 1]$. Επίσης αφού η ϕ είναι συνεχής, το $\phi^{-1}(\{s\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$, άρα συμπαγές, και συνεπώς το infimum του είναι minimum. Αφού λοιπόν $\psi(s) \in \{t \in [0, 1] : \phi(t) = s\}$, έπεται ότι

$$\phi(\psi(s)) = s \qquad \text{για κάθε } s \in [0, 1].$$

Ισχυρισμός 4: Η ψ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1:

Θα δείξω ότι

$$s_1 < s_2 \quad \Longrightarrow \quad \psi(s_1) < \psi(s_2).$$

Πράγματι αν $\psi(s_1) \geq \psi(s_2)$, τότε, αφού η ϕ είναι αύξουσα, έχουμε $\phi(\psi((s_1)) \geq \phi(\psi(s_2))$ δηλαδή $s_1 \geq s_2$.

Ισχυρισμός 5: $\psi([0, 1]) \subseteq C$.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $s \in [0, 1]$ ώστε $\psi(s) \in C^c$, τότε το $\psi(s)$ θα περιέχεται σε κάποιο ανοικτό διάστημα I_i^n. Επειδή το I_i^n είναι ανοικτό, περιέχει κάποιο $t < \psi(s)$. Ομως, η ϕ είναι σταθερή στο I_i^n, οπότε $\phi(t) = \phi(\psi(s)) = s$. Αλλά από τον ορισμό του, το $\psi(s)$ είναι το μικρότερο από όλα τα t που ικανοποιούν $\phi(t) = s$, άτοπο.

[4] συγκεκριμένα το $(\phi(x_-), \phi(x_+)) \setminus \{\phi(x)\}$