Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$

Πρόταση 1 *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα, δεξιά συνεχής. Υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ_F στο $\mathbb{R}$ ώστε*

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \quad \textit{για κάθε } a, b \in \mathbb{R},\ a \le b.$$

Απόδειξη Έστω $F_- \equiv \inf\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$ και $F_+ \equiv \sup\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$, οπότε $-\infty \le F_- \le F_+ \le +\infty$. Αφού η F είναι είναι αύξουσα, τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχουν στο $[-\infty,+\infty]$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F_-$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F_+$. Επεκτείνουμε λοιπόν την F στο $[-\infty,+\infty]$ θέτοντας $F(-\infty) = F_-$ και $F(+\infty) = F_+$.

Θεωρώ την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{(a,b] : -\infty \le a < b < \infty\} \cup \{(a,\infty) : -\infty \le a < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$$

(τα στοιχεία της θα ονομάζουμε *η-διαστήματα*). Είναι στοιχειώδης οικογένεια, επομένως το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των πεπερασμένων ενώσεων $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ ξένων η-διαστημάτων είναι άλγεβρα.

Πρώτο Βήμα Ορισμός του μ_F στην $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ορίζουμε}\ \ \mu_F((a,b]) &= F(b) - F(a) \quad \text{όταν } a, b \in \mathbb{R},\ a \le b \\
\mu_F((-\infty,b]) &= F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(b) - F(-\infty), \\
\mu_F((a,+\infty)) &= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a).
\end{aligned}$$

$$\text{Αν}\ \ A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j], \quad \text{όπου} \ \ -\infty \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \cdots \le a_n < b_n \le +\infty$$

είναι ένα στοιχείο[1] της $\mathcal{A}$, θέτουμε

$$\mu_F\Big(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]\Big) = \sum_{j=1}^{n} (F(b_j) - F(a_j)).$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$\mu_F\Big(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu_F((a_j, b_j]).$$

Ισχυρισμός: Το μ_F είναι καλά ορισμένο στην $\mathcal{A}$.

Δηλαδή, αν ένα $A \in \mathcal{A}$ γραφτεί κατά δύο διαφορετικούς τρόπους $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, όπου $I_i, J_j \in \mathcal{E}$, τότε $\sum_{i=1}^{n} \mu_F(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F(J_j)$.

Απόδειξη. (a) Υποθέτουμε πρώτα ότι η οικογένεια $\{J_j\}$ αποτελείται από ένα μόνο η-διάστημα, δηλαδή ότι $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = (c,d]$. Τότε, αναδιατάσσοντας εν ανάγκη τα η-διαστήματα $I_i = (a_i, b_i]$, θα έχουμε

$$c = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_n = d$$

[1] όπου, αν $b_n = +\infty$, με το σύμβολο $(a_n, b_n]$ θα εννοούμε το $(a_n, +\infty)$

και συνεπώς

$$(\cancel{F(b_1)}-F(a_1))+(\cancel{F(b_2)}-\cancel{F(a_2)})+\cdots+(F(b_n)-\cancel{F(a_n)}) = -F(a_1)+F(b_n) = F(d)-F(c)$$

διότι $F(b_1)=F(a_2), F(b_2)=F(a_3), \ldots, F(b_{n-1})=F(a_n)$.

(β) Αν τώρα $\bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^m J_j$, τότε κάθε η-διάστημα I_i είναι ένωση των η-διαστημάτων $I_i \cap I_j$, $j=1,\ldots,m$, επομένως από το (α)

$$\mu_F(I_i) = \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)\right) = \sum_{j=1}^m \mu_F(I_i \cap J_j)$$

και ομοίως
$$\mu_F(J_j) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^n (I_i \cap J_j)\right) = \sum_{i=1}^n \mu_F(I_i \cap J_j)$$

άρα
$$\sum_{i=1}^n \mu_F(I_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \mu_F(I_i \cap J_j)\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \mu_F(I_i \cap J_j)\right) = \sum_{j=1}^m \mu_F(J_j).$$

Αν τώρα αποδείξω ότι το μ_F είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$, τότε από το Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή το μ_F θα δέχεται σ-προσθετική επέκταση στην σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$, η οποία περιέχει όλα τα ημιανοικτά διαστήματα και συνεπώς είναι η σ-άλγεβρα Borel. Επιπλέον η επέκταση αυτή θα είναι μοναδική, καθώς το μ_F είναι σ-πεπερασμένο στην $\mathcal{A}$, εφόσον $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1]$ και $\mu_F((n,n+1]) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Μένει λοιπόν να αποδείξω ότι

Δεύτερο Βήμα: Το μ_F είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$.

Πράγματι, *(i) Το μ_F είναι πεπερασμένα προσθετικό στην $\mathcal{A}$.*

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού: Αν $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ και $B = \bigcup_{j=1}^m J_j$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και είναι ξένα, τότε όλα τα η-διαστήματα I_i και J_j είναι ξένα οπότε

$$\mu_F(A \cup B) = \mu_F(\bigcup_{i=1}^n I_i \cup \bigcup_{j=1}^m J_j) = \sum \mu_F(I_i) + \sum \mu_F(J_j) = \mu_F(A) + \mu_F(B).$$

(ii) Το μ_F είναι σ-προσθετικό στην $\mathcal{A}$. Πρέπει να δείξω ότι

$$\text{Αν } \ A_n \in \mathcal{A} \text{ είναι ξένα ανά δύο και } \ \cup_{n=1}^\infty A_n = A \in \mathcal{A}, \quad \text{τότε} \quad \mu_F(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu_F(A_n). \quad (1)$$

Δεν είναι δύσκολο να πεισθούμε ότι αρκεί να περιορισθούμε στην περίπτωση όπου τα A_n και A είναι η-διαστήματα. Πράγματι:

Εξ υποθέσεως, αφού $A \in \mathcal{A}$, το A είναι πεπερασμένη ένωση ξένων η-διαστημάτων, $A = \bigcup_{j=1}^m J_j$. Εφόσον κάθε $A_i \subset A = \bigcup_{j=1}^m J_j$ έχουμε $A_i = \bigcup_{j=1}^m (J_j \cap A_i)$ και συνεπώς

$$\bigcup_{i=1}^\infty \left(\bigcup_{j=1}^m (J_j \cap A_i)\right) = A = \bigcup_{j=1}^m J_j \qquad \text{άρα} \quad \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{i=1}^\infty (J_j \cap A_i)\right) = \bigcup_{j=1}^m J_j$$

οπότε, επειδή τα J_j είναι ξένα,

$$\bigcup_{i=1}^\infty (J_j \cap A_i) = J_j \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots m.$$

Αλλά κάθε $J_j \cap A_i$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων η-διαστημάτων, οπότε από την προηγούμενη ισότητα το J_j είναι ένωση ξένων η-διαστημάτων

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ij} = J_j \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots m.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_{ij}) = \mu_F(J_j) \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots m$$

γιατί τότε, προσθέτοντας τις m αυτές ισότητες κατά μέλη, από την πεπερασμένη προσθετικότητα του μ_F θα προκύψει η (1).

Με άλλα λόγια, αρκεί να αποδείξω ότι

Αν I_n είναι ξένα ανά δύο η-διαστήματα και $\cup_{n=1}^{\infty} I_n = I$ είναι η-διάστημα, τότε

$$\mu_F(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n). \tag{2}$$

Απόδειξη της (2) Η σχέση

$$\mu_F(I) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n)$$

είναι εύκολη: Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, επειδή το μ_F είναι πεπερασμένα προσθετικό και τα I, I_n ανήκουν στην άλγεβρα $\mathcal{A}$, έχουμε

$$\mu_F(I) = \mu_F(\bigcup_{n=1}^{N} I_n) + \mu_F(I \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n) \geq \mu_F(\bigcup_{n=1}^{N} I_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu_F(I_n)$$

$$\text{οπότε} \quad \mu_F(I) \geq \sup_N \sum_{n=1}^{N} \mu_F(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, *υποθέτω πρώτα ότι το I είναι φραγμένο διάστημα* (οπότε και κάθε I_n θα είναι φραγμένο) και γράφω $I = (a, b]$, $\quad I_n = (a_n, b_n]$.

Η F είναι δεξιά συνεχής (!). Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$F(a + \delta) - F(a) < \epsilon \tag{3}$$

και, για τον ίδιο λόγο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\delta_n > 0$ ώστε

$$F(b_n + \delta_n) - F(b_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,. \tag{4}$$

Επειδή $(a, b] = \cup_n (a_n, b_n]$, έχουμε $[a + \delta, b] \subseteq \cup_n (a_n, b_n + \delta_n)$. Όμως το $[a + \delta, b]$ είναι συμπαγές (!), άρα το ανοικτό κάλυμμα $\{(a_n, b_n + \delta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα: υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n + \delta_n).$$

Αν κάποιο από τα ανοικτά αυτά διαστήματα περιέχεται εξ ολοκλήρου σε κάποιο άλλο, το παραλείπουμε και εξακολουθούμε να έχουμε κάλυμμα του $[a + \delta, b]$. Αναδιατάσσοντας τώρα εν ανάγκη τα διαστήματα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε $(a_n, b_n + \delta_n)$ τέμνει το επόμενο διάστημα $(a_{n+1}, b_{n+1} + \delta_{n+1})$ και δεν το υπερκαλύπτει, δηλαδή ότι

$$b_n + \delta_n \in (a_{n+1}, b_{n+1} + \delta_{n+1}) \qquad \text{για κάθε} \;\; n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\mu_F(I) &= F(b) - F(a) < F(b) - F(a+\delta) + \epsilon \qquad \text{από την (3)} \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \qquad (\text{αφού } F \text{ αύξουσα και } a_1 < a + \delta,\ b < b_N + \delta_N) \\
&= (F(b_N + \delta_N) - F(a_N)) + (F(a_N) - F(a_{N-1})) + \cdots + (F(a_2) - F(a_1)) + \epsilon \\
&= (F(b_N + \delta_N) - F(a_N)) + \sum_{k=1}^{N-1} (F(a_{k+1}) - F(a_k)) + \epsilon \\
&\leq (F(b_N + \delta_N) - F(a_N)) + \sum_{k=1}^{N-1} (F(b_k + \delta_k) - F(a_k)) + \epsilon \qquad (\text{λόγω της (5)}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} (F(b_k + \delta_k) - F(a_k)) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \Big(F(b_k) + \frac{\epsilon}{2^k} - F(a_k) \Big) + \epsilon \qquad (\text{από την (4)}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \Big(\mu_F((a_k, b_k]) + \frac{\epsilon}{2^k} \Big) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mu_F((a_k, b_k]) + \frac{\epsilon}{2^k} \Big) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, b_k]) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, αποδείξαμε, με την υπόθεση ότι το I είναι φραγμένο, την απαιτούμενη ανισότητα

$$\mu_F(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k).$$

Όταν το I είναι της μορφής $I = (-\infty, b]$ όπου $b \in \mathbb{R}$ (δηλαδή $(-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$) τότε[2] για κάθε $M < \infty$ καλύπτω το διάστημα $[-M, b]$ με πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων της μορφής $(a_n, b_n + \delta_n)$ και όπως πριν καταλήγω στην ανισότητα

$$\mu_F([-M, b]) = F(b) - F(-M) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu_F((a_k, b_k]) + 2\epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) + 2\epsilon$$

επομένως

$$\mu_F(I) = F(b) - \lim_{M \to +\infty} F(-M) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) + 2\epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε πάλι έπεται η απαιτούμενη ανισότητα. Με τον ίδιο τρόπο, όταν $I = (a, +\infty)$, καταλήγουμε για κάθε $M < +\infty$ στην

$$\mu_F((a, M]) = F(M) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) + 2\epsilon.$$

---

[2] αρκεί να υποθέσω ότι όλα τα I_n είναι φραγμένα, διότι αλλιώς, αν π.χ. $I_1 = (-\infty, b_1]$ οπότε
$I = (-\infty, b] = (-\infty, b_1] \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (a_n, b_n]$ έχω
$\mu_F(I) = \mu_F((-\infty, b_1]) + \mu_F(\bigcup_{n=2}^{\infty} (a_n, b_n]) = \mu_F((-\infty, b_1]) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_F((a_n, b_n])$
από την προηγούμενη περίπτωση.