Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 4

(Παράδοση: 14 Ιανουαρίου 2009)

1. Η συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$ Αν $f,g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι η ισότητα

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \qquad \text{σχεδόν για κάθε } x$$

ορίζει ένα στοιχείο $h \in L^1(\mathbb{R})$ (το οποίο λέγεται *συνέλιξη* των f και g και συμβολίζεται $f * g$).
[Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy < \infty$.]

2. Μοναδικότητα του μέτρου Lebesgue
Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E+x) = \mu(E)$ και $\nu(E+x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_E(x)\chi_F(x+y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_E(x-y)\chi_F(x)\, d(\mu\times\nu)(x,y)$$

για κάθε ζευγάρι Borel υποσυνόλων E, F του $\mathbb{R}^n$.

3. Το «εμβαδόν κάτω από την καμπύλη» Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη. Θέτουμε

$$SG_f = \{(x,y) \in X \times [0,+\infty] : y \leq f(x)\}$$

(το «υπογράφημα» της f). Δείξτε ότι το SG_f είναι $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-μετρήσιμο και ότι

$$(\mu \times m)(SG_f) = \int_X f(x)d\mu(x).$$

4. Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Borel ώστε για κάθε $t > 0$ να ισχύει $f(tx) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x > 0$ (δηλαδή για κάθε $t > 0$ υπάρχει $A_t \subseteq (0,+\infty)$ με $m(A_t^c) = 0$ ώστε $f(tx) = f(x)$ για κάθε $x \in A_t$).
Δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μια σταθερά.
[Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα Tonelli στη συνάρτηση
$g(t,x) = |f(tx) - f(x)|$.]