10 Δεκεμβρίου 2007

Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 3

(Παράδοση: 21 Δεκεμβρίου 2007)

1. Έστω (f_n) μια ακολουθία στον[1] L^+. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, και ότι

$$\int f = \lim \int f_n < +\infty.$$

Δείξτε ότι $\int_E f = \lim \int_E f_n$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

2. Έστω $f \in L^+$. Ορίζουμε $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το λ είναι μέτρο, και ότι

$$\int g d\lambda = \int f g d\mu$$

για κάθε $g \in L^+$ [Υπόδειξη: θεωρήστε πρώτα την περίπτωση που η g είναι απλή.]

3. Έστω $f \in L^+$ με $\int f < +\infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\mu(E) < \infty$ και $\int_E f > \left(\int f\right) - \varepsilon$.

4. Αν $f_n, g_n, f, g \in L^1$, $f_n \to f$ σχεδόν παντού, $g_n \to g$ σχεδόν παντού, $|f_n| \leq g_n$ και $\int g_n \to \int g$, τότε

$$\int f_n \to \int f.$$

[*Υπόδειξη:* Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.]

5. Υποθέτουμε ότι $f_n, f \in L^1$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Τότε,

$$\int |f_n - f| \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n| \to \int |f|.$$

6. Αν $f \in L^1(m)$ και $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, τότε η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g$, $g \in L^1$, και $f_n \to f$ κατά μέτρο. Δείξτε ότι

$$\int f_n \to \int f$$

και $f_n \to f$ στον L^1.

8. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $f_n \to f$ κατά μέτρο.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f(x) \cos(nx) dm(x) \to 0 \quad \text{όταν} \quad n \to \infty.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που $f = \chi_J$ για τυχόν διάστημα $J = [a, b]$.]

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\int f(x) dm(x) = \int f(x+t) dm(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} \int \big| g(x) \cdot [f(x) - f(x+t)] \big| dm(x) = 0.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που η f είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-A, A]$, όπου $A > 0$.]

11. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $f \in L^1(\mu)$ ισχύει $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) = 0.$$

Να επιλέξετε τουλάχιστον 7 από τις ασκήσεις

[1] δηλ. $f_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη.