$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}t^k = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}t^k = (1+t)^{\nu}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[{\nu \atop k}\right]t^k = (1-t)^{-\nu}.$$

9/11/2023

Υπολογισμός Αθροισμάτων.

① Βασικές γεννήτριες

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty \text{ ή } \nu}\binom{\nu}{k}t^k = (1+t)^{\boxed{\nu}} \quad (\nu \in \mathbb{Z},\ \nu \geq 0)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[{\nu \atop k}\right]t^k = (1-t)^{\boxed{-\nu}}, \quad |t|<1 \quad (\nu \in \mathbb{Z},\ \nu \geq 0)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}t^k = (1+t)^{x}, \quad x \in \mathbb{R},\ |t|<1.$$

μπορεί να μην τον χρησιμοποιούμε και καθόλου. Είναι γενίκευση της διωνυμικής σειράς.

② Παράδειγμα

$$\sum_{k=0}^{\nu} \underbrace{k(k-1)}_{\text{πολυώνυμο}} \underbrace{\binom{\nu}{k}}_{\text{διωνυμικός συντελεστής}} 3^k = ?$$

1ος τρόπος → με γεννήτριες

1) Παίρνω την παρόμοια γεννήτρια.

2) Κάνω πράγματα για να απαιτήσω μέσα της το ζητούμενο άθροισμα.

$$\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} t^k = (1+t)^v \quad \xRightarrow{d/dt}$$

παραγωγίζω ως προς t.

$$\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} k t^{k-1} = v(1+t)^{v-1} \quad \xRightarrow{d/dt}$$

$$\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} k(k-1) t^{k-2} = v(v-1)(1+t)^{v-2} \quad \xRightarrow{\text{πολ/ζω με } t^2}$$

$$\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} k(k-1) t^{k} = v(v-1)(1+t)^{v-2} t^2 \quad \xRightarrow{\text{θέτω } t=3}$$

$$\sum_{k=0}^{v} \binom{v}{k} k(k-1) 3^{k} = 9v(v-1)4^{v-2}$$

2ος τρόπος → ιδιότητα διων. συντελεστών.

$$\binom{v}{k} = \frac{v}{k}\binom{v-1}{k-1} \quad (k \neq 0)$$

→ Δεν την έχουμε πει αλλά ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ!

Μας βοηθάει να ενσωματώσουμε τους όρους εντός του διωνυμικού συντελεστή.

$$\frac{v!}{k!(v-k)!} = \frac{v}{k} \frac{(v-1)!}{(k-1)!(v-k)!}$$

→ οι πρώτοι 2 όροι του είναι 0

$$\sum_{k=\cancel{0}\,2}^{v} k(k-1)\binom{v}{k}3^k = \sum_{k=2} \cancel{k}(k-1)\frac{v}{\cancel{k}} \cdot \frac{v-1}{\cancel{k-1}}\binom{v-2}{k-2}3^k =$$

$\binom{v-1}{k-2}$ απλά το έσπασα 2 φορές

σταθερά

$$= v(v-1)\sum_{k=2}^{v}\binom{v-2}{k-2}3^k \overset{j=k-2}{=} v(v-1)\sum_{j=0}^{v-2}\binom{v-2}{j}3^{j+2} =$$

$$= 9v(v-1)\underbrace{\sum_{j=0}^{v-2}\binom{v-2}{j}3^j}_{(1+3)^{v-2}} = 9v(v-1)4^{v-2}$$

έβγαλα το 3^2 απέξω

δεν θα μεταφερθεί πολυώνυμο του κ.

ου-σή-εν μέθοδο;

③ Αθροίσματα $\sum_{k=0}^{\nu} f(k) \binom{\nu}{k} p^k$

① Ανάλυση του $f(k)$ σε καθοδικά παραγοντικά

$(k)_0,\ (k)_1,\ (k)_2, \dots$
$\quad = 1 \quad\ = k \quad\ = k(k-1)$

όσα είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $+1$.

(δηλ. παραγ. τάξης έως και ο βαθμός του $f(k)$)

② Υπολογισμός κάθε όρου από αυτούς που σπάει το άθροισμα με γεννήτριες / ιδιότητα $\binom{\nu}{k} = \frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1}$

④ Παράδειγμα

$$S = \sum_{k=0}^{\nu} (3k^2 - 2k + 1)\binom{\nu}{k} 5^k = ;$$

σταθερές

1

$$3k^2 - 2k + 1 = A_0 (k)_0 + A_1 (k)_1 + A_2 (k)_2 \Leftrightarrow (\text{I})$$

$$3k^2 - 2k + 1 = A_0 + A_1 k + A_2 k(k-1) \Leftrightarrow$$

$$3k^2 - 2k + 1 = A_2 k^2 + (A_1 - A_2)k + A_0 \Leftrightarrow$$

Αντιστοιχίζω τους συντελεστές

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = 3 \\ A_1 - A_2 = -2 \\ A_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \\ A_2 = 3 \end{cases}$$

$$S \overset{(\text{I})}{=} \sum_{k=0}^{\nu} \left(1 + (k)_1 + 3(k)_2\right)\binom{\nu}{k} 5^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} 5^k + \sum_{k=0}^{\nu} (k)_1 \binom{\nu}{k} 5^k + 3\sum_{k=0}^{\nu} (k)_2 \binom{\nu}{k} 5^k.$$

Σπάω το άθροισμα

Αυτό έχουμε και στους 3 όρους, απλά με διαφορετικό r σε κάθε όρο.

Πρέπει να υπολογιστεί:

$$\sum_{k=0}^{\nu} (k)_r \binom{\nu}{k} p^k$$

Αυτό γίνεται είτε με r φορές παραγ. του $(1+t)^\nu$ ή με $\binom{\nu}{k} = \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-r+1)}{k(k-1)\dots(k-r+1)} \binom{\nu-r}{k-r}$

2

Με παραγώγιση:

1) Αρχίζω από γνωστή γεννήτρια

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^\nu \xrightarrow{\frac{d^r}{dt^r}}$$

εδώ παραγωγίζω r φορές

2) Κάνω πράξεις για να φτάσω εκεί που θέλω

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (k)_r t^{k-r} = (\nu)_r (1+t)^{\nu-r} \xrightarrow{\text{πολ/ζω } \cdot t^r}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (k)_r t^k = (\nu)_r (1+t)^{\nu-r} t^r \xrightarrow{t=p}$$

Άρα,

$$S = (1+5)^\nu + (\nu)_1 (1+5)^{\nu-1} 5 + 3(\nu)_2 (1+5)^{\nu-2} 5^2 =$$

$$= 6^\nu + 5\nu 6^{\nu-1} + 75\nu(\nu-1) 6^{\nu-2}$$

⑤ Παράδειγμα

δεν μπορώ να πω $\dfrac{\text{πολυώνυμο}}{\text{πολυώνυμο}}$.

$$S = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+1} \binom{\nu}{k} 7^k = ?$$

Αυτός ο παρονομαστής είναι ειδική μορφή, οπότε μπορώ να το χειριστώ.

Λύση:

1ος τρόπος: γεννήτρια

ορισμένη ολοκλήρωση απαραίτητα γιατί αλλιώς θα είχα (+c).

αρχίζω από μια κλασσική γεννήτρια

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^{\nu} \xRightarrow{\int_0^u dt} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{u} =$$

$$= \left[\frac{(1+t)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{t=0}^{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{1}{k+1} u^{k+1} = \frac{(1+u)^{\nu+1} - 1}{\nu+1} \xRightarrow{u=7}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{1}{k+1} 7^{k+1} = \frac{8^{\nu+1} - 1}{\nu+1} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{:7} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{1}{k+1} 7^k = \frac{8^{\nu+1} - 1}{7(\nu+1)}$$

Υπερτερεί αυτός ο τρόπος για πιο δύσκολα αθροίσματα.

2ος τρόπος: Ιδιότητα $\binom{\nu}{k} = \frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1}$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+1} \binom{\nu}{k} 7^k = \frac{1}{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{\nu+1}{k+1} \binom{\nu}{k} 7^k =$$

πολλ/ζω και διαιρώ με $(\nu+1)$.

$$=\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu+1}{k+1}7^k=\frac{1}{\nu+1}\sum_{j=1}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{j}7^{j-1}$$

$j=k+1$

$j-1=k$

$$=\frac{1}{7(\nu+1)}\left(\sum_{j=0}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{j}7^j-\binom{\nu+1}{0}7^0\right)=$$

Βγάζω εκτός το 7^{-1}

Το βάζω $j=0$ (προσθέτω δλδ έναν όρο) αλλά τον αφαιρώ μετέπειτα.

$$=\frac{(1+7)^{\nu+1}-1}{7(\nu+1)}\Longrightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{1}{k+1}7^k=\frac{8^{\nu+1}-1}{7(\nu+1)}}\ !$$

6 Αθροισμα τύπου

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\nu}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+r)}\binom{\nu}{k}p^k}$$

→ πολυων. του k.

1 Σπάσε το $\frac{f(k)}{(k+1)\cdots(k+r)}=A_{-r}(k)_{-r}+A_{-r+1}(k)_{-r+1}+\dots+A_{\_}(k)_{\_}$

το → Σπάσε σε άθροισμα καθοδικών παραγοντικών

Θέλω τόσα καθοδικά όσα (βαθμός πολυνόμου $f(k)+1$)

βαθμός του $f(k)$ μείον r

με

$$(k)_{-r}=\frac{1}{(k+1)\cdots(k+r)}$$

$$(k)_{-r+1}=\frac{1}{(k+1)\cdots(k+r-1)}$$

δλδ $-(r-1)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

2) Κάθε όρος υπολογίζεται χωριστά με:

— Γεννήτριες (παραγώγιση ⊕ ολοκλήρωση)

(ή)

— Ιδιότητα $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa}\binom{\nu-1}{\kappa-1}$

7 Παράδειγμα

$$S = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{k^3-3k^2-2k+5}{(k+1)(k+2)} \binom{\nu}{k} 7^k = ;$$

Λύση:

$\Gamma' \; A_{-2}(k)_{-2} + A_{-1}(k)_{-1} + A_0(k)_0 + A_1(k)_1$

1

$$\frac{k^3-3k^2-2k+5}{(k+1)(k+2)} = \frac{A_{-2}}{(k+1)(k+2)} + \frac{A_{-1}}{k+1} + A_0 + A_1 k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^3-3k^2-2k+5 = A_{-2} + A_{-1}(k+2) + A_0(k+1)(k+2) + A_1 k(k+1)(k+2) \Leftrightarrow$$

Θα μπορούσα να κάνω και τις επιμεριστικές για σιγουριά. $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5 = A_{-2} + 2A_{-1} + 2A_0 \\ -2 = A_{-1} + 3A_0 + 2A_1 \\ -3 = A_0 + 3A_1 \\ 1 = A_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1 = 1,\ A_0 = -6,\ A_{-1} = 14,\ A_{-2} = -11$$

Άρα,

$$\boxed{S = -11\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{1}{(k+1)(k+2)}7^k + 14\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{1}{k+1}7^k - 6\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}7^k + \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}k\cdot 7^k}$$

! Σ' αυτό το άθροισμα

Πολ/ζω και διαιρώ με $(\nu+1)(\nu+2)$

Όμως, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{1}{(k+1)(k+2)}7^k =$

$$= \sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\cdot\binom{\nu}{k}\frac{\nu+1}{k+1}\,\frac{\nu+2}{k+2}\,7^k =$$

$$= \frac{1}{7^2(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu+2}{k+2}7^{k+2} \quad \underline{j=k+2}$$

$$= \sum_{j=2}^{\nu+2}\binom{\nu+2}{j}7^j = \sum_{j=0}^{\nu+2}\binom{\nu+2}{j}7^j - \binom{\nu+2}{1}7 - \binom{\nu+2}{0}$$

$$= (7+1)^{\nu+2} - \binom{\nu+2}{1}7 - \binom{\nu+2}{1} =$$

$$= 8^{\nu+2} - 7(\nu+2) - 1.$$

Άρα,

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{1}{(k+1)(k+2)}7^k = \frac{1}{7^2(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu+2}{k+2}7^{k+2} =$$

$$= \frac{8^{\nu+2}-7(\nu+2)-1}{49(\nu+1)(\nu+2)}$$

και οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστοί από προηγούμενα παραδείγματα

πολυώνυμο.

8 Αθροίσματα τύπου $\sum_{k=0}^{\nu \text{ ή } \infty} f(k)p^k$

Πρέπει $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \nu \text{ πεπερ.} \longleftrightarrow \text{οποιοδήποτε } p \\ \nu \;\infty \longleftrightarrow |p|<1. \end{cases}$

Ιδέα Υπολογισμού:

1) Σπάσιμο $f(k)$ σε καθοδικά παραγοντικά.

2) Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^{\nu \text{ ή } \infty} (k)_r \rho^k$ με παραγώγιση της

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \ |t|<1}$$

ή της

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\nu} t^k = \frac{1-t^{\nu+1}}{1-t}}$$

ολοσχή διαδικασία

(9) Παράδειγμα

$S = 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + \nu\cdot 3^\nu = ;$

$S = \sum_{k=0}^{\nu} k\cdot 3^k$, Παίρνω μια γενικότερη που είναι παρόμοια

Έχω $\sum_{k=0}^{\nu} t^k = \frac{1-t^{\nu+1}}{1-t}$ d/dt παραγωγίζω

$$\sum_{k=0}^{\nu} k t^{k-1} = \frac{-(\nu+1)t^\nu(1-t) + (1-t^{\nu+1})}{(1-t)^2} \xRightarrow{t=3}$$

Άρα,

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\nu} k 3^k = \frac{-(\nu+1)3^\nu(1-3) + (1-3^{\nu+1})}{(1-3)^2}$$

βγάζω το 3^{-1} εκτός αθροίσματος

$$\sum_{k=0}^{\nu} k 3^k = 3\cdot\frac{2(\nu+1)3^\nu + (1-3^{\nu+1})}{4}$$

10 Παράδειγμα

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k = ;$$

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 = A_2 (k)_2 + A_1 (k)_1 + A_0 (k)_0 =$$

$$= A_2 k(k-1) + A_1 k + A_0 = A_2 k^2 + (A_1 - A_2)k + A_0$$

Άρα, $A_0 = 1, \quad A_1 - A_2 = 2, \quad A_2 = 1.$

$$(k+1)^2 = (k)_2 + 3(k)_1 + 1$$

Άρα,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (k)_2 \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} (k)_1 \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Έχω $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k = (1-t)^{-1} \xrightarrow{d/dt}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} = +1 \cdot (1-t)^{-2} \xrightarrow{d/dt}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) t^{k-2} = +2(1-t)^{-3}.$$

Άρα,

$$S = \left[\frac{2t^2}{(1-t)^3} + 3 \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} \right] \xrightarrow{t = \frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{27}} + 3 \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \ldots$$

τα βάζω για να φτιάξω τον εκθέτη να είναι t^k, διότι $\left(\frac{1}{3}\right)^k$.