14/12/23

Ασκήσεις - Εφαρμογές

① Πιθανότητες - Μέση Τιμή

Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα

Εστιαζόμαστε:

- Σε πειράματα με πεπερασμένο αριθμό ισοπίθανων αποτελεσμάτων

πιθανότητα ενδεχομένου = $\frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

πχ. Ρίψη ζαριού 10 φορές

πιθανότητα έρχεται τουλάχιστον ένα "6" = $\frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$ ⊛

Αποτέλεσμα = Διατεταγμένη 10-άδα αριθμών από $\{1,2,\dots,6\}$

Ευνοϊκό αποτέλεσμα = Διατεταγμένη 10-άδα που εμφανίζεται ένα τουλ. "6"

⊛ Δεκάδες από το $\{1,2,\dots,6\}$ που δεν εμφανίζεται το "6"

X: τυχαία μεταβλητή = Αριθμητικό χαρακτηριστικό του πειράματος

πχ: X = # εμφανίσεων "6" σε 10 ρίψεις ζαριού

Βρήκαμε

$P(X \geq 1) = \frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$

↑

πιθανότητα

$P(X = x) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

$\text{δυνατές} = 6^{10}$

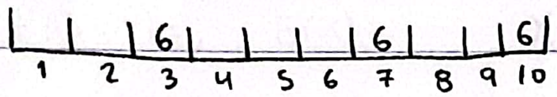
πιθ. σε 10 ρίψεις ζαριού εμφ x ακριβώς "6"

Ευνοϊκό αποτέλεσμα για $X=x$

$\parallel$

Μια διατεταγμένη 10-άδα από το $\{1,2,\dots,6\}$ όπου υπάρχουν ακριβώς x εξάρια

$\parallel$



1º Βήμα: Επιλογή θέσεων για το "6" $= \binom{10}{x}$

2º Βήμα: Τοποθέτηση αριθμών από $\{1,\dots,5\}$ στις υπόλοιπες θέσεις: 5^{10-x}

Άρα $\underbrace{P(X=x)}_{\text{Συνάρτηση πιθανότητας της } X} = \dfrac{\binom{10}{x} 5^{10-x}}{6^{10}}$, $x = 0,1,2,\dots,10$

$P(X=x) \geq 0$

$\sum_x P(X=x) = 1$

$P(X=x) = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

↓

Ποσοστό ευνοϊκών αποτελεσμάτων για να συμβεί το $X=x$

↓

Μακροπρόθεσμο ποσοστό εμφανίσεων του $X=x$, αν το πείραμα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον

Μέση τιμή της X = $E(X) = \sum_x x P(X=x)$

↓

expectation

πχ. Αν θέλαμε να βρούμε πειραματικά την $E(X)$

$X = \#$ εμφ του "6" σε 10 ρίψεις ζαριού

Θα κάναμε το εξής:

Επανάληψη του πειράματος πολλές φορές, καταγραφή της X, Μέσος όρος

πείραμα	εμφ. "6" $= X$
1	2
2	5
3	1
4	2
5	2

κλπ

$$E(X) \simeq \frac{2+5+1+2+2}{5}$$

οπότε

$$E(X) = \frac{\sum_x x \cdot \#\text{ πειραμάτων που εμφ. } X=x}{\#\text{ πειραμάτων}}$$

$\frac{\#\text{ πειραμάτων που εμφ. } X=x}{\#\text{ πειραμάτων}} = P(X=x)$ καθώς ο # πειραμάτων τείνει στο ∞

πχ. Στις 10 ρίψεις ζαριού με $X = \#$ εμφανίσεων "6"

$$E(X) = \sum_{x=0}^{10} x \, \frac{\binom{10}{x} 5^{10-x}}{6^{10}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \sum_{x=1}^{10} x \binom{10}{x} 5^{-x}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \sum_{x=1}^{10} x \, \frac{10}{x} \binom{9}{x-1} \left(\frac{1}{5}\right)^x =$$

$$\overset{u=x-1}{=} \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cdot 10 \, \frac{1}{5} \sum_{u=0}^{9} \binom{9}{u} \left(\frac{1}{5}\right)^u = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{5}\right)^9$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{6^9}{5^9} = \frac{10}{6}$$

② Το διωνυμικό μοντέλο κάλπης

Πείραμα τύχης:

Κάλπη με m Λευκά ($1,2,\dots,m$), n Μαυρα ($m+1, m+2, \dots, m+n$) σφαιρίδια

Επιλέγω N σφαιρίδια με επανάθεση

$X = \#$ Λευκών

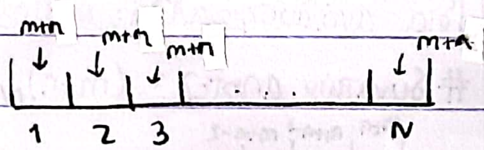
$P(X=x) = ;\ ,\ E(X) = ;$

$$P(X=x) = \frac{\text{ευνοϊκά αποτελ.}}{\text{δυνατά αποτελ.}}$$

Δυνατο αποτελ = Διατ. N-άδα σφαιριδίων

Ευνοϊκό αποτελ = Διατ. N-άδα σφαιριδίων με x λευκά

$\#$ Δυνατών αποτελ $= (m+n)^N$



$\#$ Ευνοϊκών αποτελ $= \binom{N}{x} \cdot m^x \cdot n^{N-x}$

Ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα δημιουργείται σε στάδια

1º στάδιο: Επιλογή θέσεων για τα λευκά: $\binom{N}{x}$ τρόποι

2º στάδιο: Τοποθέτηση λευκών στις θέσεις που επιλέξαμε: m^x τρόποι

3º στάδιο: Τοποθέτηση μαύρων: n^{N-x} τρόποι

Άρα $P(X=x) = \dfrac{\binom{N}{x} m^x n^{N-x}}{(m+n)^N}$, $x = 0,1,2,\dots,N$

$$E(X) = \sum_x x P(X=x) = \sum_{x=0}^{N} x \frac{\binom{N}{x} m^x n^{N-x}}{(m+n)^N} = \frac{n^N}{(m+n)^N} \sum_{x=1}^{N} x \frac{N}{x} \binom{N-1}{x-1} \left(\frac{m}{n}\right)^x$$

$$\overset{k=x-1}{=} \frac{N n^N}{(m+n)^N} \frac{m}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \left(\frac{m}{n}\right)^k = \frac{N \cdot n^N}{(m+n)^N} \cdot \frac{m}{n} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{N-1}$$

$$= \frac{N\cdot n^N}{(m+n)^N}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{(m+n)^{N-1}}{n^{N-1}} = N\cdot\frac{m}{m+n}$$

Διαισθητικά:

$\frac{m}{m+n}$ = ποσοστό λευκών στην κάλπη

N = αριθμός εξαγωγών σφαιριδίων

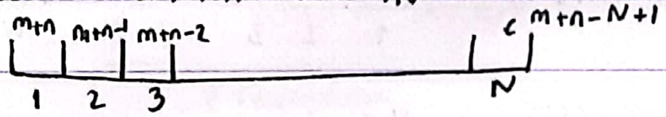
$N\cdot\frac{m}{m+n}$ = Αναμενόμενος αριθμός λευκών σε N εξαγωγές

③ Το υπεργεωμετρικό μοντέλο κάλπης

Ίδιο μοντέλο με το διωνυμικό αλλά χωρίς επανάθεση

Ίδια ανάλυση αλλά:

\# δυνατών αποτελ $= (m+n)_N$



\# ευνοϊκών αποτελ $= \binom{N}{x}(m)_x(n)_{N-x}$

Άρα $$P(X=x) = \frac{\overset{\frac{N!}{x!(N-x)!}}{\binom{N}{x}}(m)_x(n)_{N-x}}{(m+n)_N}, \quad x=0,1,2,\dots,N$$

$$= \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{N-x}}{\binom{m+n}{N}}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{N} x\, P(X=x) = \sum_{x=0}^{N} x\, \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{N-x}}{\binom{m+n}{N}}$$

$$= \frac{1}{\binom{m+n}{N}} \sum_{x=1}^{N} x\, \frac{m}{x}\binom{m-1}{x-1}\binom{n}{N-x} \overset{u=x-1}{=} \frac{m}{\binom{m+n}{N}} \underbrace{\sum_{u=0}^{N-1}\binom{m-1}{u}\binom{n}{N-1-u}}_{=\binom{m-1+n}{N-1}\ \text{Cauchy}}$$

$$= \frac{m\binom{m+n-1}{N-1}}{\binom{m+n}{N}} = \frac{m\binom{m+n-1}{N-1}}{\frac{m+n}{N}\binom{m+n-1}{N-1}} = N\cdot\frac{m}{m+n}$$

④ Θέμα 1 / Σεπτ 2007

500 άτομα → 100 οικογένειες - 1 πατέρας, 1 μητέρα, 3 παιδιά

Επιλογή 50 ατόμων

#επιλογών ώστε

i) ακριβώς 20 παιδιά

ii) ακριβώς 10 μητέρες και 25 παιδιά

iii) χωρίς άτομα απ' την ίδια οικογένεια

iv) με τουλάχιστον 1 πατέρα, 1 μητέρα, 1 παιδί

Λύση

i) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Επιλογή} \\ \text{παιδιών}}}{\binom{300}{20}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Επιλογή} \\ \text{υπολ.}}}{\binom{200}{30}}$

ii) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Επιλογή} \\ \text{μητέρων}}}{\binom{100}{10}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Επιλογή} \\ \text{παιδιών}}}{\binom{300}{25}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Επιλογή} \\ \text{πατεράδων}}}{\binom{100}{15}}$

iii) $\binom{100}{50}\underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdots 5}_{50} = \binom{100}{50}5^{50}$

iv) Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού