2/11/23

Πλήθος ακέραιων λύσεων γραμμικής εξίσωσης

① Ερώτημα

λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_v=k$ με $x_i \in \mathbb{Z}$ (*)

και άλλους περιορισμούς

② Βασικό πρόβλημα 1

ακερ. λύσεων της (*) με $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,v$

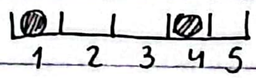
$= \binom{v}{k}$

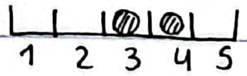
Παράδειγμα

$v=5,\ k=2 \quad x_1+x_2+\dots+x_5=2 \quad , \quad x_i \in \{0,1\}$

Αντιστοιχία

Λύση $\{1,0,0,1,0\}$ <—> Καταν. 2 όμοιων σφαιριδίων σε 5 διακ. κελιά χωρητ. 1 <—> Συνδ. 5 ανά 2 $\{1,4\}$



(0,0,1,1,0) <—>  <—> {3,4}

Κάθε λύση της (*) με $x_i \in \{0,1\}$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε

- Κατανομή k όμοιων σφαιρ. σε v διακ. κελιά χωρ. 1
- Συνδυασμός v ανά k (ποια x_i θα είναι ίσα με 1)

③ Βασικό πρόβλημα 2.

ακερ. λύσεων της (*) με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$
$= \left[\begin{smallmatrix} \nu \\ k \end{smallmatrix} \right] = \binom{\nu+k-1}{k}$

Παράδειγμα

$\nu=5$, $k=2$ $\quad x_1+x_2+\dots+x_5=2$, $x_i \in \{0,1\}$

Αντιστοιχία

$(0,0,0,2,0) \leftrightarrow \underset{1}{|\;}\underset{2}{|\;}\underset{3}{|\;}\underset{4}{|\circ\circ}\underset{5}{|\;|} \leftrightarrow \{4,4\}$

$(1,0,0,1,0) \leftrightarrow \underset{1}{|\circ}\underset{2}{|\;}\underset{3}{|\;}\underset{4}{|\circ}\underset{5}{|\;|} \leftrightarrow \{1,4\}$

Κάθε λύση της (*) με $x_i \geq 0$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε
- κατανομή k όμοιων σφαιρ. σε ν διακ. κελιά χωρ. ∞
- Συνδυασμός ν ανά k με επαναλ. (ποια x_i θα είναι ίσα με 1)

$x_1+x_2+\dots+x_\nu = k$, $x_i \in \mathbb{Z}$ (*)

④ Εφαρμογή 1 : $x_i \geq s_i$

ακέραιων λύσεων της (*) με $x_i \geq s_i$, $i=1,2,\dots,\nu$

↑ δοσμένα

||

κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακ. κελιά άπειρης χωρητικότητας ώστε να μπουν τουλάχιστον s_i σφαιρ στο κελί i
$i=1,2,\dots,\nu$

||

συνδυασμών του $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu\}$ ν ανά k με επαναλ. ώστε το στοιχείο ω_i να εμφανίζεται τουλάχιστον s_i φορές $i=1,2,\dots,\nu$

||

Λύση

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_\nu=k \\ x_i \geq s_i,\ i=1,2,\dots,\nu \end{array}\right\}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{array}{l} y_i = x_i - s_i \\ i=1,2,\dots,\nu \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1+s_1+y_2+s_2+\dots+y_\nu+s_\nu=k \\ y_i \geq 0,\ i=1,2,\dots,\nu \end{array}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1+y_2+\dots+y_\nu=k-\sum_{i=1}^{\nu} s_i \\ y_i \geq 0,\ i=1,2,\dots,\nu \end{array}\right.$$

Άρα # ακερ λύσεων της (*) με $x_i \geq s_i$, $i=1,2,\dots,\nu$

$$= \left[k - \sum_{i=1}^{\nu} s_i \right]$$

π.χ.

ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+x_3=20$

με $x_1 \geq 3$

$x_2 \geq 1$

$x_3 \geq 7$

$$= \left[\begin{array}{c} 3 \\ 9 \end{array}\right] = \binom{3+9-1}{9}$$

$$= \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

⑤ **Εφαρμογή 2:** $x_i \le m_i$

\# ακέραιων λύσεων της (*) με $x_i \le \underset{\uparrow \text{ Δοσμένα}}{m_i}$, $i=1,2,\dots,v$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Δεν έχει αντιστοιχία με κατανομές σφαιριδίων σε κελιά χωρητικότητας m_i, ούτε με συνδυασμούς.

Λύση

$$\left\{\begin{matrix} x_1+x_2+\dots+x_v=k \\ x_i \le m_i,\ i=1,2,\dots,v \end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow \ \begin{matrix} y_i = m_i - x_i \\ i=1,2,\dots,v \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} m_1-y_1+m_2-y_2+\dots+m_v-y_v=k \\ y_i \ge 0,\ i=1,2,\dots,v \end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} y_1+y_2+\dots+y_v=\sum_{i=1}^{v} m_i - k \\ y_i \ge 0 \end{matrix}\right\}$$

\# ακερ. λύσεων της (*) με $x_i \le m_i$, $i=1,2,\dots,v$

$$= \left[\begin{matrix} v \\ \sum_{i=1}^{v} m_i - k \end{matrix}\right]$$

⑥ Εκκρεμότητα : $s_i \le x_i \le m_i$

\# ακερ. λύσεων της (*) με $m_i \le x_i \le s_i$, $i=1,2,\dots,\nu$

$\| \leftarrow m_i \geq 0$

\# κατανομών k ομοιων σφαιρ σε ν διακ. κελιά ώστε στο κελί i να μπουν τουλάχιστον m_i και το πολύ s_i σφαιρίδια

πχ'

\# λύσεων $x_1+x_2+x_3=17$ με $1 \le x_1 \le 10$

$3 \le x_2 \le 7$

$2 \le x_3 \le 6$

Το πρόβλημα λύνεται με αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

⑦ \# ακερ. λύσεων ανίσωσης

\# ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=k$ με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$

πχ' $\nu=5$, $k=3$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le 3$

$\left.\begin{array}{l}(3,0,0,0,0)\\(0,2,1,0,0)\end{array}\right\}$ Λύσεις $=3$

$\left.\begin{array}{l}(1,0,0,0,0)\\ \vdots\end{array}\right\}$ Λύσεις $=1$

$\left.\begin{array}{l}(1,1,0,0,0)\\(0,2,0,0,0)\end{array}\right\}$ Λύσεις $=2$

$(0,0,0,0,0)\}$ Λύσεις $=0$

Λύση

1ος τρόπος

\# ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu \le k$ με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$ $= \sum_{j=0}^{k}$ \# ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=j$ με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[{v \atop j} \right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{v+j-1}{j} \underset{\uparrow}{=} \binom{v+k}{k} = \binom{(v+1)+k-1}{k} = \left[{v+1 \atop k} \right]$$

Διαγ αναγ.
σχέση τριγώνου
Pascal

2ος τρόπος

Αντιστοιχία

Λύση ανίσωσης $\quad\quad$ Λύση εξίσωσης

$$x_1 + \dots + x_v \le k \quad \xleftrightarrow{1-1} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_v + x_{v+1} = k$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, v \qquad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, v$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_v) \xleftrightarrow{x_{v+1} = k - \sum_{i=1}^{v} x_i} (x_1, x_2, \dots, x_{v+1})$$

Άρα # ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_v \le k$, $x_i \geq 0$ = # ακερ. λυσ της $x_1 + x_2 + \dots + x_{v+1} = k$, $x_i \geq 0$ $= \left[{v+1 \atop k} \right]$

Παράδειγμα

Ακέραια λύση της $x_1 + x_2 + x_3 \le 6$ $\longleftrightarrow$ Ακέραια λύση της $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

$(3, 0, 2) \longleftrightarrow (3, 0, 2, 1)$

$(1, 1, 2) \longleftrightarrow (1, 1, 2, 2)$

$(3, 1, 1) \longleftrightarrow (3, 1, 1, 1)$

⑧ Απόδειξη της Βασικής αναγωγικής σχέσης του τριγώνου Pascal

$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1}$

Απόδειξη

$\binom{\nu}{k} =$ # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu = k$ με $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu$

$=$ # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=k$ με $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu-1$ και $x_\nu=0$ $+$ # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=k$ με $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu-1$ και $x_\nu=1$

$= \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1}$

⑨ Ασκηση: Θέμα 3 Μαρτιος 2012

a) # ακερ λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu+x_{\nu+1}+\dots+x_{2\nu} = 8+3\nu$

με τους περιορισμούς $x_1, x_2, \dots, x_\nu \geq 3$

$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots, x_{2\nu} \in \{0,1\}$

Λύση

Ζητούμενο Πλήθος $= \sum_{k=0}^{\nu}$ # ακερ. λύσεων της εξισ. $x_1+\dots+x_{2\nu} = 8+3\nu$ με $x_i \geq 3$, $i=1,2,\dots,\nu$, $x_i \in \{0,1\}$, $i=\nu+1,\dots,2\nu$ και $x_{\nu+1}+x_{\nu+2}+\dots+x_{2\nu}=k$

Μια λύση τέτοιου τύπου περιορίζεται σε 2 στάδια

1^o: Λύση της $x_{\nu+1}+x_{\nu+2}+\dots+x_{2\nu}=k$ με $x_i \in \{0,1\} \to \binom{\nu}{k}$ τρόποι

2^o: Λύση της $x_1+x_2+\dots+x_\nu = 8+3\nu-k$ με $x_i \geq 3 \to \left[\begin{smallmatrix}\nu\\ 8+3\nu-k-3\nu\end{smallmatrix}\right]$ τρόποι

Άρα έχω $\binom{\nu}{k}\left[\begin{smallmatrix}\nu\\ 8-k\end{smallmatrix}\right]$ λύσεις

Άρα

Ζητούμενο πλήθος $= \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} [8^{\nu-\kappa}]$