31/10/23

Ασκήσεις σε προβλήματα Διατάξεων κ' Συνδυασμών

① Θέμα 1 /Ιαν 2023

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ $\qquad A \cap B = \emptyset$

$B = \{B_1, B_2, \dots, B_{20}\}$ $\qquad A \cup B = \Omega$

α) # υποσύνολο του Ω με 9 στοιχεία, 5 από τα οποία ανήκουν στο Α

β) # υποσύνολο του Ω με 5 στοιχεία απ'το Α και οσαδήποτε απ'το Β

γ) # υποσύνολο του Ω με άρτιο αριθμό στοιχείων απ'το Α και 4 στοιχεία απ'το Β

δ) # υποσύνολο του Ω που περιέχουν το πολύ 9 απ'το Α και 4 ακριβώς απ'το Β

ε) # υποσύνολο του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο του Α και τουλάχιστον ένα στοιχείο απ'το Β

Λύση

α) Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια

1^o: Επιλογή 5 στοιχείων απ'το Α $\to \binom{10}{5}$ τρόποι

2^o: Επιλογή 4 στοιχείων απ'το Β $\to \binom{20}{4}$ τρόποι

Απο πολλ/κή αρχή υπάρχουν $\binom{10}{5}\binom{20}{4}$ τέτοια υποσύνολα

β) Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια

1^o: Επιλογή 5 στοιχείων απ'το Α $\to \binom{10}{5}$ τρόποι

$2^{\underline{o}}$: Επιλογή ενός υποσυνόλου του B → 2^{20} τρόποι

Από πολλ/κή αρχή υπάρχουν $\binom{10}{5}2^{20}$ τέτοια υποσύνολα

γ) Ζητούμενο πλήθος $= \sum_{i=0}^{5}$ # υποσυν. του º με 2i στοιχεία απ'το A και 4 απ'το B

προσθετική αρχή

$$= \sum_{i=0}^{5}\binom{10}{2i}\binom{20}{4} = \binom{20}{4}\left[\binom{10}{5}+\binom{10}{2}+\binom{10}{4}+\binom{10}{6}+\binom{10}{8}+\binom{10}{10}\right]$$

δ) $$\sum_{i=0}^{9}\binom{20}{4}\binom{10}{i} = \binom{20}{4}\underbrace{\sum_{i=0}^{9}\binom{10}{i}}_{\underbrace{\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}}_{2^{10}}-\underbrace{\binom{10}{10}}_{1}} = \binom{20}{4}(2^{10}-1)$$

ε) Μια ιδέα θα ήταν να δημιουργήσω ένα τέτοιο υποσύνολο σε 3 στάδια

$1^{\underline{o}}$: Επιλογή 1 στοιχείου απ'το A → $\binom{10}{1}$ τρόποι

$2^{\underline{o}}$: Επιλογή 1 στοιχείου απ'το B → $\binom{20}{1}$ τρόποι

$3^{\underline{o}}$: Επιλογή 7 στοιχείων απ'τα υπόλοιπα → $\binom{28}{7}$ τρόποι

Τότε από πολλ/κή αρχή $= \binom{10}{1}\binom{20}{1}\binom{28}{7}$ υποσύνολα

Αυτό είναι ΛΑΘΟΣ γιατί ΔΙΠΛΟΜΕΤΡΩ υποσύνολα

(Διαφορ. αποφάσεις στα στάδια μπορεί να οδηγούν στο ίδιο αντικείμενο = υποσύνολο)

$1^{\underline{o}\varsigma}$ τρόπος

Υποσύνολα του º με 9 στοιχεία = Υποσύνολα του º με 9 στοιχεία τουλ. 1 απ'το A και τουλ. 1 απ'το B ∪ Υποσυν. του º με 9 στοιχεία μόνο απ'το A ∪ Υποσυν. του º με 9 στοιχεία μόνο απ'το B

$$\Rightarrow \binom{30}{9} = x + \binom{10}{9} + \binom{20}{9} \Rightarrow x = \binom{30}{9} - \binom{20}{9} - \binom{10}{9}$$

2ος τρόπος

Υποσυν του Ω με 9 στοιχεία με 1 τουλ. απ'το Α και 1 τουλ απ'το Β $= \bigcup_{i=1}^{8}$ Υποσυν του Ω με 9 στοιχεία ακριβώς i απ'το Α και $9-i$ απ'το Β

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{8} \binom{10}{i}\binom{20}{9-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{9} \binom{10}{i}\binom{20}{9-i} - \binom{10}{0}\binom{20}{9} - \binom{10}{9}\binom{20}{0}$$

$$= \binom{30}{9} - \binom{20}{9} - \binom{10}{9}$$

Υπενθύμιση Cauchy
$$\binom{r+s}{v} = \sum_{i=0}^{v} \binom{r}{i}\binom{s}{v-i}$$

② Θέμα 2 / Φεβρ 2002

$\Omega = \{1, 2, \dots, v\}$

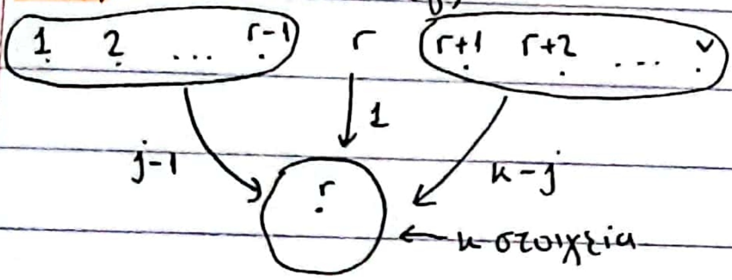
\# υποσυν του Ω που ικανοποιούν τις

α) Περιέχουν ακριβώς k στοιχεία

β) Περιέχουν τον ακέραιο r

γ) Περιέχουν ακριβώς $j-1$ ακεραίους μικρότερους του r

Λύση: (α) κ' (β) κ' (γ)



Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια

1ο: Επιλογή $j-1$ στοιχείων απ'το $\{1, 2, \dots, r-1\} \rightarrow \binom{r-1}{j-1}$ τρόποι

2ο: Επιλογή $k-j$ στοιχείων απ'το $\{r+1, r+2, \dots, v\} \rightarrow \binom{v-r}{k-j}$ τρόποι

Απο πολλαπλή αρχή

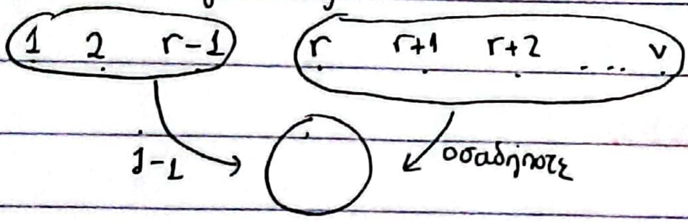
υποσ. που πληρούν (α) κ' (β) κ' (γ) $= \binom{r-1}{j-1}\binom{v-r}{k-j}$

Αν:

(α) # υποσ που πληρουν μόνο το (α) $= \binom{v}{k}$

(β) # υποσ (β) $= \sum_{r=0}^{v-1}\binom{v-1}{r} = 2^{v-1}$

(γ) # υποσ. (γ) $= \binom{r-1}{j-1} 2^{v-r+1}$



(α) κ' (β)

υποσ. που πληρούν μόνο (α) κ' (β) $= \binom{v-1}{k-1}$

(α) κ' (γ) # υποσ. (α) κ' (γ) $= \binom{r-1}{j-1}\binom{v-r+1}{k-j+1}$

(β) κ' (γ) # υποσ (β) κ' (γ) $= \binom{r-1}{j-1} 2^{v-r}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

(3) Θέμα 1 / Σεπτ 2005

$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2\nu\}$

α) # υποσυν. μεγέθους k που περιέχουν ακριβώς 3 περιττούς

β) # υποσυνόλων μεγέθους k που περιέχουν το πολύ 1 από τους $2i-1$ και $2i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$

Λύση

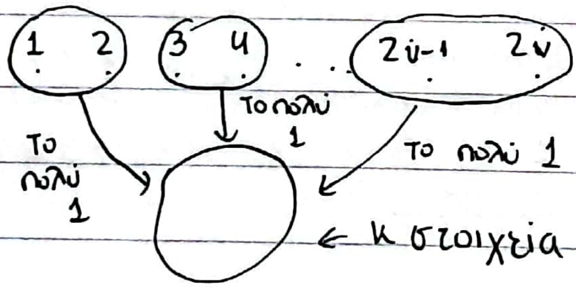
α) Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή 3 περιττών $\rightarrow \binom{\nu}{3}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή $k-3$ άρτιων $\rightarrow \binom{\nu}{k-3}$ τρόποι

Από πολλ/κή αρχή $\binom{\nu}{3}\binom{\nu}{k-3}$ υποσυν.

β)



Ένα τέτοιο σύνολο γίνεται σε 2 στάδια:

1ο: Επιλογή k ζευγών $\{2i-1, 2i\}$ που θα μπει 1 στοιχείο $\rightarrow \binom{\nu}{k}$ τρόποι

2ο: Επιλογή περιττού ή αρτίου $\rightarrow 2^k$ τρόποι

Από πολλ/κή αρχή: $\binom{\nu}{k}2^k$ τέτοια υποσύνολα