26/10/23

Συνδυασμοί - επιπλέον ιδιότητες

ασκήσεις Διαιρέσεις - Διαμερίσεις

① **Άσκηση**

μεταθέσεων των $1, 2, \dots, 10$ με

i) το 3 πριν το 5

ii) το 3 πριν το 5 και το 5 πριν το 7

iii) τα 3,5 πριν το 7

iv) στις πρώτες 5 θέσεις οι περιττοί

Λύση

ii) Κάθε τέτοια μετάθεση γίνεται σε 2 βήματα

1ο: Επιλογή θέσεων για τα 3, 5, 7 → $\binom{10}{3}$ τρόποι

2ο: Τοποθ. υπολοίπων σε σειρά → 7! τρόποι

Από πολλαπλ. αρχή: $\binom{10}{3} 7! = \frac{10!}{3!\cancel{7!}} \cancel{7!} = \frac{10!}{6}$

iii) Εδώ 3 στάδια:

1ο: Επιλογή θέσεων για 3, 5, 7 → $\binom{10}{3}$ τρόποι

2ο: Απόφαση για τη θέση των 3, 5 → 2 τρόποι

3ο: Τοποθέτηση υπολοίπων σε σειρά → 7!

Από πολλαπλ. αρχή: $\binom{10}{3} \cdot 2 \cdot 7! = \frac{10!}{3}$

iv) 5! 5!

② Ιδιότητες συνδυασμών πέρα του τριγ. Pascal.

1) Συμμετρική ιδιότητα:

$$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu-k}$$

Αιτιολόγηση

Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ και $A \subseteq \Omega$ με $N(A) = k$

τότε $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{συμπλ. } A}}{N(A^c)} = \nu - k$ στοιχεία. Η αντιστοιχία $A \longleftrightarrow A^c$ είναι 1-1

Άρα # υποσ. του Ω με k στοιχεία $=$ # υποσ. του Ω με $\nu-k$ στοιχεία

$$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu-k}$$

2) Τύπος Cauchy

$$\binom{r+s}{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{r}{k}\binom{s}{\nu-k}$$

πχ $\binom{9}{3} = \binom{4+5}{3} = \binom{4}{0}\binom{5}{3} + \binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{5}{0}$

Απόδειξη:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \omega_{r+2}, \ldots, \omega_{r+s}\}$

Έχω

υποσυν του Ω με ν στοιχεία $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{προσθ. αρχή}}}{=} \sum_{k=0}^{\nu}$ # υποσυν. του Ω με ν στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς k από το $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$

Ένα υποσύνολο του Ω με ν στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς k είναι απ' τα $\omega_1, \ldots, \omega_r$ γίνεται σε 2 στάδια

1^o στάδιο: Επιλογή στοιχείων απ'τα $\omega_1, \dots, \omega_r \to \binom{r}{k}$ τρόποι

2^o στάδιο: Επιλογή στοιχείων απ'τα $\omega_{r+1}, \dots, \omega_{r+s} \to \binom{s}{v-k}$ τρόποι

Άρα απο πολλ/κη αρχή υπάρχουν $\binom{r}{k}\binom{s}{v-k}$ τέτοια συν.

3) Τύπος Cauchy για επαναλ. συνδ.

$$\left[{r+s \atop v} \right] = \sum_{k=0}^{v} \left[{r \atop k} \right] \left[{s \atop v-k} \right]$$

ή $$\binom{r+s+v-1}{v} = \sum_{k=0}^{v} \binom{r+k-1}{k} \binom{s+v-k-1}{v-k}$$

Σχόλιο για την συμμετρική ιδιότητα:

πχ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ $v=5$

Τα $\underset{k}{\overset{\shortparallel}{2}}$-σύνολα είναι όσα και τα $\underset{v-k}{\overset{\shortparallel}{3}}$-σύνολα

διότι

$$\binom{v}{k} \left\{ \begin{array}{ccc} & A \longleftrightarrow A^c & \\ \{\omega_1,\omega_2\} & \longleftrightarrow & \{\omega_3,\omega_4,\omega_5\} \\ \{\omega_1,\omega_3\} & \longleftrightarrow & \{\omega_2,\omega_4,\omega_5\} \\ \{\omega_1,\omega_4\} & \longleftrightarrow & \{\omega_2,\omega_3,\omega_5\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \{\omega_1,\omega_5\} & \longleftrightarrow & \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} \end{array} \right\} \binom{v}{v-k}$$

Η αντιστοιχία $(\ )^c : P(\Omega) \to P(\Omega)$

$A \mapsto A^c$ είναι 1-1 και επί

③ Διαιρέσεις - Διαμερίσεις

Ορισμοί

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$

Μια διαίρεση του Ω είναι μία διατεταγμένη οικογένεια υποσυνόλων του Ω: $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ με

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \Omega$

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$

πχ μια διαίρεση του $\Omega = \{1,2,3,\dots,10\}$ είναι η

$(\{1,5,7\}, \{2,3\}, \emptyset, \emptyset, \{4\}, \{6,8,9,10\})$

Μια διαμέριση του Ω είναι μια μη-διατεταγμένη οικογένεια υποσυνόλων του Ω: $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ με

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \Omega$

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, για $i \neq j$

(iii) $A_i \neq \emptyset$, για $i = 1, 2, \dots, r$

πχ μια διαμέριση του $\Omega = \{1,2,\dots,10\}$ είναι η

$\{\{1,2,3,4,6\}, \{5,7\}, \{8,9,10\}\}$

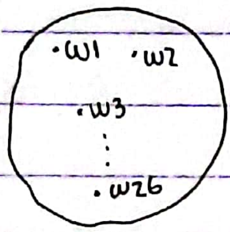
④ Άσκηση

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{26}\}$ σύνολο 26 ατόμων

i) # διαιρέσεων του Ω, $(A_1, A_2, \dots, A_7)$ σε 7 σύνολα με πληθάριθμους 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5

ii) # διαμερίσεων του Ω, $\{A_1, A_2, \dots, A_7\}$ σε 7 σύνολα, 3 2-σύνολα και 4 5-σύνολα

Λύση



i) $\rightarrow (\underbrace{\ \ }_{2}, \underbrace{\ \ }_{2}, \underbrace{\ \ }_{2}, \underbrace{\ \ }_{5}, \underbrace{\ \ }_{5}, \underbrace{\ \ }_{5}, \underbrace{\ \ }_{5})$

ii) $\rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3 \ \underbrace{\ \ }_{2} \\ 4 \ \underbrace{\ \ }_{5} \end{matrix} \right\}$

(i) Μια διαίρεση τύπου 2-2-2-5-5-5-5 γίνεται σε στάδια

1ο: Επιλογή στοιχείων $A_1 \rightarrow \binom{26}{2}$ τρόποι

2ο: Επιλογή στοιχείων $A_2 \rightarrow \binom{24}{2}$ τρόποι

3ο: Επιλογή στοιχείων $A_3 \rightarrow \binom{22}{2}$ τρόποι

4ο: Επιλογή στοιχείων $A_4 \rightarrow \binom{20}{5}$ τρόποι

5ο: Επιλογή στοιχείων $A_5 \rightarrow \binom{15}{5}$ τρόποι

6ο: Επιλογή στοιχείων $A_6 \rightarrow \binom{10}{5}$ τρόποι

7ο: Επιλογή στοιχείων $A_7 \rightarrow \binom{5}{5}$ τρόποι

διαιρέσεων 2-2-2-5-5-5-5 $= \binom{26}{2}\binom{24}{2}\binom{22}{2}\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$

$$= \frac{26!}{2!\,\cancel{24!}} \cdot \frac{\cancel{24!}}{2!\,\cancel{22!}} \cdot \frac{\cancel{22!}}{\cancel{20!}\,2!} \cdot \frac{\cancel{20!}}{5!\,\cancel{15!}} \cdot \frac{\cancel{15!}}{5!\,\cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{5!\,5!}$$

$$= \frac{26!}{2!\,2!\,2!\,5!\,5!\,5!\,5!}$$

ii) Από 1 διαμέριση $\{\underbrace{A_1, A_2, A_3}_{2\ \text{σύνολα}}, \underbrace{A_4, A_5, A_6, A_7}_{5-\text{σύνολα}}\}$

Προκύπτουν $3!\,4!$ διαιρέσεις τύπου

2-2-2-5-5-5-5 : $(\underbrace{A_1, A_2, A_3}_{2-\text{σύνολα}}, \underbrace{A_4, A_5, A_6, A_7}_{5-\text{σύνολα}})$

(Βάζω τα A_1, A_2, A_3 σε σειρά και μετά τα A_4, A_5, A_6, A_7 σε σειρά)

1 διαμέριση 3 2-σων, 4 5-συν $\longrightarrow$ $3!\,4!$ διαιρέσεις τύπου 2-2-2-5-5-5-5

$$\begin{pmatrix} \#\ \text{διαμερ. με} \\ 3\ \ 2\text{-σων} \\ 4\ \ 5\text{-σων} \end{pmatrix} \cdot 3!\,4! = \#\ \text{διαιρέσεων τύπου 2-2-2-5-5-5-5} \overset{(1)}{=} \frac{26!}{(2!)^3(5!)^4}$$

Άρα # διαμερίσεων με 3 2-σων και 4 5-σων $= \dfrac{26!}{3!\,(2!)^3\,4!\,(5!)^4}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

⑤ Τύποι διαιρέσεων - διαμερίσεων

διαιρέσεων ν στοιχείων με r υποσύνολα με πληθαρίθμους $k_1, k_2, \dots, k_r$

Πρέπει $\nu = k_1 + k_2 + \dots + k_r$

$$= \frac{\nu!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

διαμερίσεων ν στοιχείων σε r υποσύνολα εκ των οποίων

$$= \frac{\nu!}{r_1! r_2! \cdots r_\nu! (1!)^{r_1} (2!)^{r_2} \cdots (\nu!)^{r_\nu}}$$

r_1 1-σύνολα

r_2 2-σύνολα

⋮

r_ν ν-σύνολα

Πρέπει $\nu = 1r_1 + 2r_2 + \dots + \nu r_\nu$

$r = r_1 + r_2 + \dots + r_\nu$

⑥ Αντιστοιχία μεταθέσεων r ειδών στοιχείων και διαιρέσεων – Παράδειγμα

$\Omega = \{1,2,3,\dots,10\}$ $(\nu = 10)$

Διαιρέσεις τύπου 3-4-3

$(\underbrace{\{1,3,5\}}_{A_1}, \underbrace{\{2,4,6,7\}}_{A_2}, \underbrace{\{8,9,10\}}_{A_3})$

Μεταθ 3 ειδών στοιχ $\begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 3 \end{matrix}$

$\longleftrightarrow (1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3)$

$(\{4,7,5\}, \{1,6,10,8\}, \{2,3,9\}) \longleftrightarrow (2\ 3\ 3\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 2)$

$(\{1,2,5\}, \{3,4,6,10\}, \{7,8,9\}) \longleftrightarrow (1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2)$

⑦ Άσκηση

100 διακεκρ. γράμματα σε 1 ταχυδρομείο

\# μοιράσματος

σε 3 κουτιά των 20

2 κουτιά των 10

4 κουτιά των 5

$\xrightarrow[\text{κουτιά}]{\text{όμοια}}$ ≡ Διαμερ $\dfrac{100!}{3!\,2!\,4!\,(20!)^3(10!)^2(5!)^4}$

↓ Διακεκρ κουτια ||| Διαιρέσεις

$$\frac{100!}{(20!)^3(10!)^2(5!)^4}$$