ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΚΥΡΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (2006–07)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

(Ημερομηνία Παράδοσης: 19 Απριλίου 2007)

1. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K. Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}dx = |K|\cdot\int_0^\infty t^n e^{-t}dt.$$

Γενικότερα, δείξτε ότι για κάθε $p>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = |K|\cdot\int_0^\infty pt^{n+p-1}e^{-t^p}dt.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να γράψετε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\|x\|}^\infty pt^{p-1}e^{-t^p}dt\right)dx.$$

2. Η συνάρτηση $\Gamma : (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Δείξτε ότι:

(α) $\Gamma(1)=1$.

(β) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x>0$.

(γ) $\Gamma(n+1)=n!$ *για κάθε* $n=0,1,2,\ldots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση Γ είναι *λογαριθμικά κυρτή*: η $\log\Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση.

3. Για κάθε $p\geq 1$, η συνάρτηση

$$\|x\|_p = (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$B_p^n = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_p\leq 1\}.$$

Δείξτε ότι ο όγκος της B_p^n είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}.$$

4. (*το Λήμμα του Borell*) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M\subseteq\mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t>1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n\setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n\setminus tM)+\frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leq a \left(\frac{1-a}{a} \right)^{(t+1)/2}.$$

Συμπέρασμα: Αν $\mu_B(M) = a > 1/2$, δηλαδή αν το M τέμνει «παραπάνω από το μισό» B, τότε το ποσοστό του B που μένει έξω από το tM φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς το $t \to \infty$.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2} \gamma_n(A) \leq \gamma_n(A + x) \leq \gamma_n(A).$$

6. Έστω $x \in S^{n-1}$. Για κάθε $0 \leq r \leq 2$ ορίζουμε $B(x, r) = \{y \in S^{n-1} : \|y - x\|_2 \leq r\}$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $0 \leq r < 1$ τότε $\sigma(B(x, r)) \leq \exp(-\varepsilon^2 n/2)$.

(β) Για κάθε $0 \leq r \leq 2$ τότε $\sigma(B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2} \right)^{n-1}$.

7. Έστω f και g δύο φραγμένες μη αρνητικές Borel μετρήσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Ορίζουμε

$$h(r, s) = f(r) + g(s) \quad \text{αν} \quad f(r)g(s) > 0$$

και $h(r, s) = 0$ αλλιώς. Κατόπιν, θέτουμε

$$m(t) = \sup\{h(r, s) \mid r + s = t\}.$$

Αν $\gamma = \sup_r f(r)$ και $\delta = \sup_s g(s)$, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} m^p(t) dt \geq (\gamma + \delta)^p \left[\frac{1}{\gamma^p} \int_{\mathbb{R}} f^p(t) dt + \frac{1}{\delta^p} \int_{\mathbb{R}} g^p(t) dt \right]$$

για κάθε $p > 0$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε το εξής: Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $\theta \in S^{n-1}$ και θέτουμε

$$\gamma = \sup_r |K \cap (\theta^\perp + r\theta)|^{\frac{1}{n-1}} \quad , \quad \delta = \sup_s |T \cap (\theta^\perp + s\theta)|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Τότε,

$$|K + T| \geq (\gamma + \delta)^{n-1} \left(\frac{|K|}{\gamma^{n-1}} + \frac{|T|}{\delta^{n-1}} \right).$$

Συγκρίνετε αυτήν την ανισότητα με την ανισότητα Brunn-Minkowski, στην περίπτωση που $\sup_r |K \cap (\theta^\perp + r\theta)| = \sup_s |T \cap (\theta^\perp + s\theta)|$ για κάποιο $\theta \in S^{n-1}$.

8. (η απεικόνιση του Knöthe) Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, και θεωρούμε δύο ανοικτά και φραγμένα κυρτά σύνολα K και T. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $\phi : K \to T$ με τις εξής ιδιότητες:

(a) Η ϕ είναι τριγωνική: η i-οστή συντεταγμένη της ϕ εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_i$ του x. Δηλαδή,

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \ldots, \phi_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

(b) Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$ είναι θετικές στο K, και η ορίζουσα της Ιακωβιανής της ϕ είναι σταθερή. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x \in K$,

$$\det(J(\phi)(x)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x) = \frac{|T|}{|K|}.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $s = (s_1, \ldots, s_i) \in \mathbb{R}^i$ θέτουμε

$$K_s = \{y \in \mathbb{R}^{n-i} : (s, y) \in K\}$$

(όμοια για το T). Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$. Ορίζουμε $\phi_1(x) = \phi_1(x_1)$ μέσω της

$$\frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{x_1} |K_{s_1}|_{n-1} ds_1 = \frac{1}{|T|}\int_{-\infty}^{\phi_1(x_1)} |T_{t_1}|_{n-1} dt_1.$$

Επαγωγικά, ορίζουμε την $\phi_j(x) = \phi_j(x_1, \ldots, x_j)$ μέσω της

$$\frac{1}{|K_{(x_1,\ldots,x_{j-1})}|}\int_{-\infty}^{x_j} |K_{(x_1,\ldots,x_{j-1},s_j)}|_{n-j} ds_j$$

$$= \frac{1}{|T_{(\phi_1(x_1),\ldots,\phi_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}))}|}\int_{-\infty}^{\phi_j(x_1,\ldots,x_j)} |T_{(\phi_1(x_1),\ldots,\phi_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}),t_j))}|_{n-j} dt_j.$$

9. Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση (του Knöthe) $\phi : K \to T$, αποδείξτε την ανισότητα Brunn-Minkowski για κυρτά σώματα K και T στον $\mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη: Λόγω της $(I + \phi)(K) \subseteq K + \phi(K) = K + T$, μπορείτε να γράψετε

$$|K + T| \geq \int_{(I+\phi)(K)} dx = \int_K |\det(J(I + \phi)(x))|\, dx.$$