Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ

Πρόχειρες Σημειώσεις

Αθήνα, 2007

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

1.1 Χώροι Banach

(α) Ορισμοί – συμβολισμός

Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in X$, $a \in \mathbb{K}$.

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Ο αριθμός $\|x\|$ λέγεται *νόρμα* του διανύσματος $x \in X$. Το ζευγάρι $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας *χώρος με νόρμα*.

Στον ίδιο γραμμικό χώρο X μπορούμε να θεωρήσουμε διάφορες νόρμες. Όταν μελετάμε μια συγκεκριμένη νόρμα πάνω στον X, θα γράφουμε X αντί του $(X, \|\cdot\|)$.

Η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγει με φυσιολογικό τρόπο μια μετρική d στον X. Αν $x, y \in X$, ορίζουμε

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η d ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Επιπλέον, η d είναι συμβιβαστή με τη γραμμική δομή του χώρου:

(α) η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(β) η d είναι ομογενής, δηλαδή $d(ax, ay) = |a| d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $a \in \mathbb{K}$.

Θεωρούμε γνωστή τη στοιχειώδη θεωρία των μετρικών χώρων. Δίνουμε μόνο κάποιους ορισμούς για να συνεννοηθούμε για τον συμβολισμό.

Η *ανοικτή μπάλα* με κέντρο το $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$D(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}.$$

Η *κλειστή μπάλα* με κέντρο το $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}.$$

Η *σφαίρα* με κέντρο το $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$S(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| = r\}.$$

Παρατήρηση: Από το γεγονός ότι η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές έπεται ότι

$$D(x,r) = x + D(0,r) := \{x+z : \|z\| < r\}$$

δηλαδή οι περιοχές του x προκύπτουν με μεταφορά των περιοχών του 0 κατά x. Επίσης, αν $s, r > 0$ τότε

$$D(0,sr) = sD(0,r) := \{sz : z \in D(0,r)\}.$$

Αυτό προκύπτει εύκολα από το ότι η d είναι ομογενής. Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε την ανοικτή (ή την κλειστή) μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα 1, τότε γνωρίζουμε τις περιοχές κάθε σημείου του X. Γράφουμε B_X για την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X:

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Εντελώς ανάλογα ορίζουμε τις D_X και S_X.

Όπως σε κάθε μετρικό χώρο, ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(x,r) \subseteq A$. Το $B \subseteq X$ λέγεται *κλειστό* αν το $X \setminus B$ είναι ανοικτό.

Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στον X και $x \in X$, λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x ως προς τη νόρμα (*συγκλίνει ισχυρά στο* x) αν $\|x_n - x\| \to 0$. Αυτή είναι απλώς η σύγκλιση ως προς την d, επομένως ισχύει οτιδήποτε γνωρίζουμε για τη σύγκλιση σε μετρικούς χώρους. Για παράδειγμα, ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο B με $x_n \to x \in X$ έπεται ότι $x \in B$.

Αν $A \subseteq X$, γράφουμε $\text{int}(A)$ για το εσωτερικό, $\overline{A}$ για την κλειστή θήκη, και ∂A για το σύνορο του A. Οι ορισμοί είναι οι γνωστοί.

Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$m, n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ο X λέγεται *πλήρης* αν κάθε ακολουθία Cauchy (x_n) στον X συγκλίνει ισχυρά σε κάποιο $x \in X$.

Ορισμός. *Χώρος Banach* είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα.

Κάθε γραμμικός υπόχωρος Y ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Θεωρούμε απλώς τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον Y. Θα λέμε ότι ο Y είναι *υπόχωρος* του X, και αν είναι κλειστό υποσύνολο του X θα λέμε ότι ο Y είναι *κλειστός υπόχωρος* του X. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι ένας υπόχωρος Y ενός χώρου Banach X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν είναι κλειστός (άσκηση).

(β) Ανισότητες

Έστω X γραμμικός χώρος και έστω C ένα κυρτό υποσύνολο του X. Μια συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* αν

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1}$$

για κάθε $x, y \in C$ και $t \in (0,1)$. Η f λέγεται *γνησίως κυρτή* αν οποτεδήποτε έχουμε ισότητα στην (1) έπεται ότι $x = y$. Η $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, *γνησίως κοίλη*) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

(i) Ανισότητα του Jensen. *Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in C$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε*

$$\sum_{i=1}^{m} t_i f(x_i) \leq f(t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m). \tag{2}$$

Αν επιπλέον η f είναι γνησίως κοίλη, τότε ισότητα έχουμε αν και μόνο αν $x_1 = \cdots = x_m$.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m δείχνουμε ταυτόχρονα ότι $t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \in C$ και ότι ισχύει η (2). Για $m = 2$ αυτό είναι άμεσο από τον ορισμό του κυρτού συνόλου και της κοίλης συνάρτησης.

Έστω ότι $m \geq 3$ και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει αν $k < m$. Γράφουμε

$$t_1x_1 + \cdots + t_mx_m = t_1x_1 + s\sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} x_j,$$

όπου $s = t_2 + \cdots + t_m$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} x_j \in C$ γιατί $\sum_{j=2}^{m} (t_j/s) = 1$. Επίσης, $t_1 + s = 1$ άρα $\sum_{j=1}^{m} t_j x_j \in C$. Αφού η f είναι κοίλη,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} t_j x_j\right) \geq t_1 f(x_1) + sf\left(\sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} x_j\right)$$

και από την επαγωγική υπόθεση,

$$f\left(\sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} x_j\right) \geq \sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} f(x_j).$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, παίρνουμε

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} t_j x_j\right) \geq t_1 f(x_1) + s\sum_{j=2}^{m} \frac{t_j}{s} f(x_j),$$

δηλαδή το ζητούμενο. Ελέγξτε μόνοι σας την περίπτωση της γνησίως κοίλης συνάρτησης. □

Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leq \ln(t_1a_1 + \cdots + t_ma_m). \tag{3}$$

Έπεται ότι

$$a_1^{t_1}a_2^{t_2}\cdots a_m^{t_m} \leq t_1a_1+\cdots+t_ma_m \tag{4}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1=\cdots=a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1=\cdots=t_m=1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1\cdots a_m} \leq \frac{a_1+\cdots+a_m}{m}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μια άμεση συνέπεια της (4).

(ii) Ανισότητα του Young. *Αν $x,y\geq 0$ και $p,q>1$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p=y^q$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα (4) με $a=x^p$, $b=y^q$. Αφού $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $a=b$. □

Ορισμός. Αν $p,q>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p=1$ είναι ο $q=\infty$.

(iii) Ανισότητα του Hölder. *Έστω $a_1,\ldots,a_m$ και $b_1,\ldots,b_m\in\mathbb{K}$ και p,q συζυγείς εκθέτες. Τότε,*

$$\left|\sum_{j=1}^m a_jb_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το δεξιό μέλος δεν μηδενίζεται, αλλιώς η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε επίσης αρχικά ότι

$$\sum_{j=1}^m |a_j|^p = \sum_{j=1}^m |b_j|^q = 1.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^m a_jb_j\right| &\leq \sum_{j=1}^m |a_j||b_j| \leq \sum_{j=1}^m\left(\frac{|a_j|^p}{p}+\frac{|b_j|^q}{q}\right)\\ &= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^m |a_j|^p+\frac{1}{q}\sum_{j=1}^m |b_j|^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

Για τη γενική περίπτωση, θέτουμε $t=\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p}$, $s=\left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q}$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{j=1}^m |a_j/t|^p = \sum_{j=1}^m |b_j/s|^q = 1$$

και εφαρμόστε την προηγούμενη ανισότητα. Εξετάστε πότε ισχύει ισότητα. □

Στην περίπτωση $p = q = 2$ παίρνουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left|\sum_{j=1}^{m} a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^2\right)^{1/2}.$$

(iv) Ανισότητα του Minkowski. *Έστω $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ και έστω $1 \leq p < +\infty$. Τότε,*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Αν $p = 1$ η ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Υποθέτουμε ότι $p > 1$ και ότι $\sum |a_j + b_j|^p > 0$ (αλλιώς, η ανισότητα είναι προφανής). Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^{p-1} |a_j| + \sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^{p-1} |b_j|$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder με εκθέτες p και q για καθένα από τα δύο αθροίσματα. Παρατηρώντας ότι $q(p-1) = p$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p &\leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p\right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j + b_j|^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p\right)^{1/p} \right).$$

Διαιρώντας με $(\sum |a_j + b_j|^p)^{1/q}$ και χρησιμοποιώντας την $1 - (1/q) = 1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατηρήσεις. (α) Η ανισότητα του Minkowski επεκτείνεται και σε άπειρες ακολουθίες. Αν (a_j), (b_j) είναι δύο ακολουθίες στο $\mathbb{K}$ και $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < +\infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p$ συγκλίνει και

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

(β) Οι ανισότητες Hölder και Minkowski ισχύουν και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και p, q συζυγείς εκθέτες.

Ανισότητα Hölder: Αν οι $|f|^p$ και $|g|^q$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left|\int_\Omega fg\, d\mu\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Ανισότητα Minkowski: Αν οι $|f|^p$ και $|g|^p$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε η $|f+g|^p$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Η απόδειξη της ανισότητας Hölder είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της αντίστοιχης ανισότητας για πεπερασμένες ακολουθίες. Για να δείξετε ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη αρκεί το ολοκλήρωμα της $|fg|$ να είναι πεπερασμένο, κάτι που είναι συνέπεια της ανισότητας που θα δείξετε. Για να δείξετε ότι η $|f+g|^p$ είναι ολοκληρώσιμη στην ανισότητα Minkowski, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq [2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}]^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Κατόπιν, ακολουθήστε την απόδειξη της ανισότητας Minkowski για πεπερασμένες ακολουθίες.

(γ) Κλασικοί χώροι Banach

1. Νόρμες στον $\mathbb{K}^n$.

(α) Έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, ορίζουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$$

και συμβολίζουμε τον $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ με ℓ_p^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα – η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας του Minkowski. Στην περίπτωση $p = 2$ παίρνουμε τον Ευκλείδειο χώρο ℓ_2^n.

(β) Αν $p = \infty$, ορίζουμε

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

και συμβολίζουμε τον $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ με ℓ_∞^n. Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης. Στην περίπτωση του ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$, ο έλεγχος της πληρότητας μπορεί να γίνει και άμεσα.

2. Χώροι ακολουθιών

(α) Έστω $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο όλων των άπειρων ακολουθιών $x = (x_n)$ για τις οποίες $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$. Ορίζουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα (η τριγωνική ανισότητα είναι ακριβώς η ανισότητα του Minkowski). Ο χώρος που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο θα συμβολίζεται με ℓ_p.

Πρόταση 1.1.1. *Ο ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον ℓ_p. Αν $x^{(k)} = (x_n^{(k)})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p,$$

άρα η ακολουθία $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο $\mathbb{K}$. Επομένως, υπάρχει $x_n \in \mathbb{K}$ ώστε $x_n^{(k)} \to x_n$ καθώς $k \to \infty$.

Ορίζουμε $x = (x_n)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p < \varepsilon$ για κάθε $k, l \geq k_0$. Ειδικότερα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $k, l \geq k_0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|^p < \varepsilon^p.$$

Αφήνοντας το $l \to \infty$, βλέπουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $k \geq k_0$,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p.$$

Αφήνοντας τώρα το $N \to \infty$ βλέπουμε ότι $\|x^{(k)} - x\|_p \leq \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό δείχνει ταυτόχρονα ότι $x^{(k)} - x \in \ell_p \implies x \in \ell_p$ και $x^{(k)} \to x$ ισχυρά στον ℓ_p. □

(β) Στην περίπτωση $p = \infty$ μπορούμε να ορίσουμε τις εξής απειροδιάστατες γενικεύσεις του ℓ_∞^n.

(β1) Τον χώρο ℓ_∞ όλων των φραγμένων ακολουθιών, με νόρμα την

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

(β2) Τον χώρο c_0 όλων των μηδενικών ακολουθιών, με νόρμα πάλι την

$$\|x\|_0 = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον ℓ_∞. Επίσης, ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞ (άσκηση). Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, ο ℓ_∞ είναι πλήρης (θα δείξουμε κάτι πολύ γενικότερο). Άρα, οι ℓ_∞, c_0 είναι χώροι Banach.

3. Χώροι φραγμένων συναρτήσεων

Έστω A τυχόν μη κενό σύνολο. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $B(A)$ όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{K}$ με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in A\}.$$

Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα. Στην περίπτωση $A = \mathbb{N}$, ο χώρος $B(A)$ συμπίπτει με τον ℓ_∞. Παρατηρήστε ότι $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $t \in A$ να ισχύει $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$. Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $B(A)$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Πρόταση 1.1.2. *Ο $B(A)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy στον $B(A)$. Για κάθε $t \in A$ έχουμε

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

άρα η $(f_n(t))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{K}$. Επομένως, υπάρχει το $\lim_n f_n(t)$. Ορίζουμε $f : A \to \mathbb{K}$ με $f(t) = \lim_n f_n(t)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και κάθε $t \in A$ να ισχύει

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $m \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in A\} \leq \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό αποδεικνύει ταυτόχρονα ότι $f \in B(A)$ και ότι $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι K είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $C(K)$ είναι ο γραμμικός χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{K}$. Θεωρούμε τον $C(K)$ σαν υπόχωρο του $B(K)$.

Πρόταση 1.1.3. *Ο $C(K)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $B(K)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f_n \in C(K)$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Η f_n είναι συνεχής στο συμπαγές K, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: $d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$.

Αν λοιπόν $x, y \in K$ και $d(x, y) < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)| + \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η f είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο K. □

Σαν πόρισμα παίρνουμε ότι ο $C(K)$ είναι χώρος Banach για κάθε συμπαγή μετρικό χώρο K. Ειδικότερα, ο $C[a, b]$ είναι χώρος Banach.

4. Χώροι L_p

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}_p(\mu)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{K}$ για τις οποίες

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}_p(\mu)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ μ-σχεδόν παντού. Το σύνολο $L_p(\mu)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \quad , \quad a[f] = [af].$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L_p(\mu)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L_p(\mu)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας του Minkowski για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν μ-σχεδόν παντού γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \implies f = 0$. Πράγματι, αν $\int_\Omega |f|^p d\mu = 0$ τότε $f = 0$ μ-σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$.

Πρόταση 1.1.4. *Ο $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$s_n := \sum_{k=1}^n x_k \to x.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Λήμμα 1.1.5. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι πλήρης.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geq n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Αντίστροφα, έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ ώστε, για κάθε $n > m \geq n_k$,

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$n_{k+1} > n_k \geq n_k \Longrightarrow \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{n_{m+1}} - x_{n_1} \to x$. Άρα, $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$. Δείξαμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον X. Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 1.1.4. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L_p(\mu)$ με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$, $x \in \Omega$. Τότε,

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M,$$

δηλαδή $g_n \in L_p(\mu)$ και $\int_\Omega g_n^p d\mu \leq M^p$. Η (g_n) είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x) = \lim g_n(x) \in [0, \infty]$. Από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_\Omega g^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n^p d\mu \leq M^p.$$

Συνεπώς, η g^p είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού. Η s είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

$$\int_\Omega |s|^p d\mu \leq \int_\Omega g^p d\mu \leq M^p < \infty,$$

δηλαδή $s \in L_p(\mu)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leq 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leq 2^p |g(x)|^p$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_\Omega |s_n - s|^p d\mu \to 0.$$

Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 1.1.5 έπεται ότι ο $L_p(\mu)$ είναι χώρος Banach. $\square$

Ο $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ορίζεται ως εξής: αν $f : \Omega \to \mathbb{K}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα το σύνολο $A(f) = \{t \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}) = 0\}$ να είναι μη κενό, ορίζουμε το *ουσιώδες άνω φράγμα* της f θέτοντας

$$\mathrm{esssup}(f) = \inf\{t \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}) = 0\}.$$

Παρατηρήστε ότι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων f για τις οποίες $A(f) \neq \emptyset$ είναι γραμμικός χώρος και ότι $\mathrm{esssup}(f) = \min A(f)$ (άσκηση). Όπως πρίν, ταυτίζουμε τις f και g αν $f = g$ σχεδόν παντού και θεωρούμε τον χώρο $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ των κλάσεων ισοδυναμίας, με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \mathrm{esssup}(f).$$

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα και ο $L_\infty(\mu) := L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Banach (άσκηση).

(δ) Πλήρωση

Κάθε χώρος με νόρμα X «εμφυτεύεται» ισομετρικά και πυκνά σε έναν χώρο Banach. Η διαδικασία αυτή λέγεται *πλήρωση*.

Ορισμός Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|')$ λέγεται *πλήρωση* του X αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\tau : X \to \tilde{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η τ είναι *ισομετρία*, δηλαδή $\|\tau(x)\|' = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

(β) ο $\tau(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\tilde{X}$.

Πρόταση 1.1.6. *Κάθε χώρος με νόρμα έχει μια πλήρωση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $[X]$ όλων των ακολουθιών Cauchy (x_n) στον X. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[X]$, θέτοντας

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Το σύνολο $\tilde{X}$ των κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται γραμμικός χώρος ως εξής: αν x^*, y^* είναι οι κλάσεις στις οποίες ανήκουν οι ακολουθίες Cauchy (x_n), (y_n) αντίστοιχα, ορίζουμε $x^* + y^*$ την κλάση της ακολουθίας Cauchy $(x_n + y_n)$ και $a \cdot x^*$, $a \in \mathbb{K}$, την κλάση της (ax_n). Ελέγξτε ότι οι πράξεις ορίζονται καλά και ότι ο $(\tilde{X}, +, \cdot)$ είναι γραμμικός χώρος.

Ορίζουμε νόρμα στον $\tilde{X}$ ως εξής: αν $x^* \in \tilde{X}$ και (x_n) μια ακολουθία Cauchy στην κλάση x^*, θέτουμε

$$\|x^*\|' = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Το όριο αυτό υπάρχει γιατί η ακολουθία $(\|x_n\|)$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$, και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της ακολουθίας Cauchy (x_n) στην x^*. Ελέγξτε τα παραπάνω, καθώς και το ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα.

Τέλος, θεωρούμε την απεικόνιση $\tau : X \to \tilde{X}$, όπου $\tau(x)$ είναι η κλάση της σταθερής ακολουθίας $(x, x, \ldots, x, \ldots)$. Η τ είναι γραμμική απεικόνιση και $\|\tau(x)\|' = \lim_n \|x\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, ο X εμφυτεύεται «ισομετρικά» στον $\tilde{X}$.

Ισχυρισμός: Ο $\tau(X)$ είναι πυκνός στον $\tilde{X}$.

Απόδειξη. Έστω $x^* \in \tilde{X}$ και (x_n) ακολουθία Cauchy στην κλάση x^*. Τότε,

$$\lim_n \|x^* - \tau(x_n)\|' = \lim_n \lim_m \|x_m - x_n\| = 0,$$

δηλαδή $\tau(x_n) \to x^*$. Αφού το x^* ήταν τυχόν και $\tau(x_n) \in \tau(X)$, ο $\tau(X)$ είναι πυκνός στον $\tilde{X}$. □

Μένει να δείξουμε ότι ο $\tilde{X}$ είναι πλήρης. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό επιχείρημα.

Λήμμα 1.1.7. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και M πυκνό υποσύνολο του X με την ιδιότητα: κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του M συγκλίνει σε στοιχείο του X. Τότε, ο X είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Μπορούμε να βρούμε $m_n \in M$ με $d(x_n, m_n) < 1/n$. Τότε, η (m_n) είναι Cauchy άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $m_n \to x$. Αφού $d(x_n, x) \leq d(x_n, m_n) + d(m_n, x) < 1/n + d(m_n, x)$, βλέπουμε ότι $x_n \to x$. □

Έχουμε ήδη δεί ότι ο $\tau(X)$ είναι πυκνός στον $\tilde{X}$. Επίσης, η $(\tau(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν η (x_n) είναι Cauchy, και τότε $\tau(x_n) \to x^* \in \tilde{X}$, όπου x^* η κλάση της (x_n). Σύμφωνα με το Λήμμα, ο $\tilde{X}$ είναι πλήρης. □

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $r > 0$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{int}(B(x, r)) = D(x, r), \quad \overline{D(x, r)} = B(x, r), \quad \partial D(x, r) = \partial B(x, r) = S(x, r).$$

2. Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι οι απεικονίσεις
$+ : X \times X \to X$ με $(x, y) \mapsto x + y$
$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ με $(a, x) \mapsto ax$
$\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}^+$ με $x \mapsto \|x\|$
είναι συνεχείς (ως προς τις φυσιολογικές μετρικές σε κάθε περίπτωση).

3. Έστω X χώρος Banach και Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι ο Y είναι χώρος Banach αν και μόνο αν είναι κλειστός.

4. Έστω X γραμμικός χώρος και $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ δύο νόρμες στον X. Δείξτε ότι $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in X$ αν και μόνο αν $B_{(X, \|\cdot\|_2)} \subseteq B_{(X, \|\cdot\|_1)}$.

5. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $\mathrm{int}(Y) \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

6. Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$ για κάθε n.]

7. Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

8. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό, συμπαγές, συμμετρικό ως προς το 0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα δ να περιέχεται στο K. Ορίζουμε $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\| = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ ορίζεται καλά και είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

9. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με τις νόρμες $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$ και $x \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{(1/p)-(1/q)}\|x\|_q.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $p > N$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

10. Δείξτε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞.

11. Θα γράφουμε $L_p[0,1]$ για τον $L_p(\lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.

(α) Δείξτε ότι ο $L_\infty[0,1]$ είναι χώρος Banach.

(β) Αν $f \in L_\infty[0,1]$, δείξτε ότι $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ καθώς $p \to \infty$.

12. Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Δείξτε ότι αν $x \in \ell_p$ τότε $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ και αν $f \in L_q[0,1]$ τότε $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Ειδικότερα, $\ell_p \subseteq \ell_q$ και $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$.

13. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f_n, f \in L_p[0,1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ αν και μόνο αν $\|f_n - f\|_p \to 0$.

14. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f_n \in L_p[0,1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $f \in L_p[0,1]$ και $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq [0,1]$ με $\lambda(A) < \delta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, να ισχύει

$$\int_A |f_n|^p d\lambda < \varepsilon.$$

15. Έστω $C^k[0,1]$ ο χώρος όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν k συνεχείς παραγώγους, με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{0 \leq s \leq k} \left(\max\{|f^s(t)| : t \in [0,1]\}\right).$$

Δείξτε ότι ο $C^k[0,1]$ είναι χώρος Banach.

16. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η κύμανση της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\Big\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, τότε λέμε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο $BV[0,1]$ όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0,1]$ και ότι ο $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

17. Έστω $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Δείξτε ότι η απόσταση του x από τον c_0 είναι ίση με
$$d(x, c_0) = \limsup_n |x_n|.$$

18. Έστω $1 \leq p < +\infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Δείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$,
$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

19. Δείξτε ότι ο χώρος $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ δεν είναι πλήρης.

20. Δείξτε ότι ο χώρος c_0 των μηδενικών ακολουθιών με νόρμα την
$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}$$
δεν είναι πλήρης.

21. Δείξτε ότι η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα X είναι μοναδική. Αν X' είναι μια άλλη πλήρωση του X και τ' η ισομετρική εμφύτευση του X στον X', τότε υπάρχει ισομετρία επί $\Phi : \tilde{X} \to X'$ ώστε $\Phi(\tau(x)) = \tau'(x)$ για κάθε $x \in X$.

1.2 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

(α) Τελεστές και συναρτησοειδή

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. Μια απεικόνιση $T : X \to Y$ λέγεται *γραμμικός τελεστής* αν
$$T(ax_1 + bx_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$$
για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Η *εικόνα* του T είναι ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) : x \in X\}$ και ο *πυρήνας* του T είναι ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$. Ο T είναι *γραμμικός ισομορφισμός* αν είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή αν $\mathrm{Im}(T) = Y$ και $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε
$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$
για κάθε $x \in X$. Από την γραμμικότητα του T και τις ιδιότητες της νόρμας έπεται ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής:

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(α) *Ο T είναι συνεχής απεικόνιση.*
(β) *Ο T είναι συνεχής στο 0.*
(γ) *Ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Αν ο T είναι συνεχής, τότε είναι συνεχής και στο 0.

Υποθέτουμε ότι ο T είναι συνεχής στο 0. Για $\varepsilon = 1 > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε
$$\|x\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x)\| \leq 1.$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$. Τότε, $\|(\delta/2\|x\|)x\| \leq \delta$ άρα $\|T((\delta/2\|x\|)x)\| \leq 1$. Δηλαδή,

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

για κάθε $x \in X$, όπου $M = 2/\delta$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος και δείχνουμε ότι είναι συνεχής. Υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/M$. Τότε, αν $\|x - x_0\| < \delta$ έχουμε

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\| \leq M\delta = \varepsilon. \qquad \square$$

Συμβολίζουμε με $B(X,Y)$ το σύνολο τών φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$. Ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος.

Ορισμός. Αν $T \in B(X,Y)$ θέτουμε

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \ \forall x \in X, \ \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.$$

Αφού ο T είναι φραγμένος, το σύνολο στον ορισμό είναι μη κενό, άρα η $\|T\|$ ορίζεται καλά. Παρατηρούμε επίσης ότι το inf είναι στην πραγματικότητα min. Δηλαδή,

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \quad x \in X.$$

Αυτό φαίνεται ως εξής: παίρνουμε φθίνουσα ακολουθία $M_n \to \|T\|$ με την ιδιότητα

$$\|T(x)\| \leq M_n\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\|T(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} M_n\|x\| = \|T\| \cdot \|x\|.$$

Πρόταση 1.2.2. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Έστω $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Αν $\|x\| \leq 1$, τότε $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\|$. Άρα, $A \leq \|T\|$.

Αντίστροφα, αν $x \neq 0$ τότε $\|(x/\|x\|)\| \leq 1$ άρα

$$\|T(x/\|x\|)\| \leq A \Longrightarrow \|T(x)\| \leq A\|x\|.$$

Από τον ορισμό της $\|T\|$ παίρνουμε $\|T\| \leq A$. $\square$

Πρόταση 1.2.3. *Η απεικόνιση $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}^+$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. (α) Προφανώς $\|T\| \geq 0$ για κάθε $T \in B(X,Y)$. Αν $\|T\| = 0$, τότε $\|T(x)\| \leq 0 \cdot \|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$, οπότε $T(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα, $T = 0$.

(β) Αν $a \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$, τότε

$$\begin{aligned}\|aT\| &= \sup\{\|aT(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{|a| \cdot \|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= |a| \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = |a| \cdot \|T\|.\end{aligned}$$

(γ) Αν $T, S \in B(X,Y)$ και $x \in X$, τότε

$$\begin{aligned} \|(T+S)(x)\| &= \|T(x)+S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq \|T\|\cdot\|x\| + \|S\|\cdot\|x\| \\ &= (\|T\|+\|S\|)\|x\|, \end{aligned}$$

άρα $T+S \in B(X,Y)$ και $\|T+S\| \leq \|T\|+\|S\|$. □

Πρόταση 1.2.4. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y χώρος Banach. Τότε, ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ αν $n, m \geq n_0$.

Τότε, αν $x \in X$ και $n, m \geq n_0$, έχουμε $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. Αυτό δείχνει ότι η $(T_n(x))$ είναι Cauchy στον Y και αφού ο Y είναι πλήρης υπάρχει $y_x \in Y$ με $T_n(x) \to y_x$.

Ορίζουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = y_x = \lim_n T_n(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Θα δείξουμε ταυτόχρονα ότι $T \in B(X,Y)$ και $\|T - T_n\| \to 0$. Για κάθε $x \in X$ και $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|T(x) - T_n(x)\| &= \|\lim_n (T_m(x) - T_n(x))\| = \lim_n \|T_m(x) - T_n(x)\| \\ &\leq \limsup_n \|T_m - T_n\|\cdot\|x\| \leq \varepsilon\|x\|. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $(T - T_n) \in B(X,Y)$, άρα $T = (T-T_n)+T_n \in B(X,Y)$. Επίσης, $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|T - T_n\| \to 0$. □

Παρατήρηση. Αν X, Y, Z είναι χώροι με νόρμα και αν $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$, τότε

$$\|(S\circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\cdot\|T(x)\| \leq (\|S\|\cdot\|T\|)\|x\|,$$

άρα $S\circ T \in B(X,Z)$ και $\|S\circ T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|$. Ειδικότερα, αν $T \in B(X,X)$ τότε $T^m \in B(X,X)$ για κάθε m και $\|T^m\| \leq \|T\|^m$.

Ορισμός. Κάθε γραμμικός τελεστής $f : X \to \mathbb{K}$ λέγεται *γραμμικό συναρτησοειδές*. Ο χώρος $B(X,\mathbb{K})$ όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{K}$ λέγεται *δυϊκός χώρος* του X και συμβολίζεται με X^*.

Αφού ο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός χώρος X^* του X είναι χώρος Banach με νόρμα την*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}. \qquad \square$$

Αν X είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε $X^* \neq \emptyset$. Το συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$ με $f(x) = 0$, $x \in K$ είναι φραγμένο.

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα X μπορούμε να ορίσουμε ένα μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ως εξής: θεωρούμε ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων x_n με $\|x_n\| = 1$, την οποία επεκτείνουμε σε βάση του X προσθέτοντας ένα σύνολο διανυσμάτων $\{z_i : i \in I\}$. Ορίζουμε

$f(x_n) = n$ και $f(z_i) = 0$, $i \in I$, και επεκτείνουμε γραμμικά. Έτσι παίρνουμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές f για το οποίο

$$\sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\} \geq \sup\{|f(x_n)| : n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Το ερώτημα «πόσο πλούσιος είναι ο δυϊκός χώρος» θα μας απασχολήσει αργότερα. Θα δούμε (θεώρημα Hahn-Banach) ότι ο X^* περιέχει πάντα πολλά συναρτησοειδή.

(β) Παραδείγματα τελεστών και συναρτησοειδών

1. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε $R, L : \ell_p \to \ell_p$ με

$$R(x_1, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, \dots, x_n, \dots), \quad L(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Ο R (δεξιά μετατόπιση) και ο L (αριστερή μετατόπιση) είναι γραμμικοί τελεστές. Ο R είναι ένα προς ένα αλλά όχι επί, ενώ ο L είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα. Ακόμα, $\|R\| = \|L\| = 1$ και $L \circ R = Id$, ενώ $R \circ L \neq Id$ και $\mathrm{Ker}(R \circ L) = \{x \in \ell_p : x_n = 0, n \geq 2\}$.

2. Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Για σταθερό $y \in \ell_q$ ορίζουμε $f_y : \ell_p \to \mathbb{K}$ με

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Από την ανισότητα του Hölder έπεται ότι για κάθε $x \in \ell_p$ η σειρά $\sum_n x_n y_n$ συγκλίνει απολύτως και

$$|f_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \|y\|_q \|x\|_p.$$

Άρα $f_y \in \ell_p^*$ και $\|f_y\| \leq \|y\|_q$ (η γραμμικότητα του f_y είναι φανερή).

3. Τελείως ανάλογα, αν p και q είναι συζυγείς εκθέτες και $g \in L_q(\mu)$, ορίζουμε $\phi_g : L_p(\mu) \to \mathbb{K}$ με

$$\phi_g(f) = \int_\Omega f g d\mu.$$

Τότε, $\phi_g \in (L_p(\mu))^*$ και $\|\phi_g\| \leq \|g\|_{L^q(\mu)}$.

4. Έστω $t \in [0,1]$. Ορίζουμε $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{K}$ με $\delta_t(f) = f(t)$. Τότε, $\delta_t \in (C[0,1])^*$ και $\|\delta_t\| = 1$.

5. Έστω X, Y συμπαγείς μετρικοί χώροι και $\tau : Y \to X$ συνεχής. Ορίζουμε $A : C(X) \to C(Y)$ με $(Af)(y) = f(\tau(y))$. Τότε, $A \in B(C(X), C(Y))$ και $\|A\| = 1$.

6. Έστω $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_0^1 |\kappa(x,y)| d\lambda(y) \leq c_1, \quad x - (\varsigma\ .\pi.)$$

$$\int_0^1 |\kappa(x,y)| d\lambda(x) \leq c_2, \quad y - (\varsigma\ .\pi)$$

όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές. Για κάθε $1 < p < +\infty$ ορίζουμε $T : L_p([0,1]) \to L_p([0,1])$ με

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \kappa(x,y) f(y) d\lambda(y).$$

Θα δείξουμε ταυτόχρονα ότι η $(Tf)(x)$ ορίζεται καλά $x - $ (ς .π) και ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής. Έχουμε

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x)| &= \left| \int_0^1 \kappa(x,y) f(y) d\lambda(y) \right| \\
&\leq \int_0^1 |\kappa(x,y)|^{1/q} |\kappa(x,y)|^{1/p} |f(y)| d\lambda(y) \\
&\leq \left(\int_0^1 |\kappa(x,y)| d\lambda(y) \right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\kappa(x,y)| |f(y)|^p d\lambda(y) \right)^{1/p} \\
&\leq c_1^{1/q} \left(\int_0^1 |\kappa(x,y)| |f(y)|^p d\lambda(y) \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= \int_0^1 |(Tf)(x)|^p dx \\
&\leq c_1^{p/q} \int_0^1 \int_0^1 |\kappa(x,y)| |f(y)|^p d\lambda(y) d\lambda(x) \\
&= c_1^{p/q} \int_0^1 |f(y)|^p \left(\int_0^1 |\kappa(x,y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&\leq c_1^{p/q} c_2 \int_0^1 |f(y)|^p d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|Tf\|_p \leq c_1^{1/q} c_2^{1/p} \|f\|_p$.

7. Έστω X ο υπόχωρος του $C[0,1]$ που αποτελείται από τις συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε $D : X \to C[0,1]$ με $Df = f'$. Ο D είναι ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής (άσκηση).

(γ) Ισομορφισμοί, ισομετρίες, ισοδύναμες νόρμες

Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (δηλ. ένα προς ένα και επί) και οι T, T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές.

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός, υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{M_2}\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M_1 \|x\|, \quad x \in X.$$

Αντίστροφα αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε να ισχύει η $(*)$, τότε ο T είναι ισομορφισμός χώρων με νόρμα.

Λέμε ότι δύο χώροι με νόρμα X και Y είναι *ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$. Οι X και Y λέγονται *ισομετρικά ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με την επιπλέον ιδιότητα

$$\|T(x)\| = \|x\|, \quad x \in X.$$

Ένας τέτοιος ισομορφισμός λέγεται *ισομετρία*. Παρατηρήστε ότι κάθε ισομετρία διατηρεί τις αποστάσεις: αν $x_1, x_2 \in X$, τότε $\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$. Επομένως, δύο ισομετρικά ισόμορφοι χώροι «ταυτίζονται» τόσο σαν γραμμικοί όσο και σαν μετρικοί χώροι.

Δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ πάνω στον ίδιο γραμμικό χώρο X λέγονται *ισοδύναμες* αν η ταυτοτική απεικόνιση $Id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ είναι ισομορφισμός. Ισοδύναμα, αν υπάρχουν θετικές σταθερές a, b ώστε

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

για κάθε $x \in X$.

Παρατηρήσεις. 1. Ο ισομορφισμός χώρων με νόρμα και η ισοδυναμία νορμών είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

2. Αν ένας χώρος με νόρμα είναι πλήρης, τότε είναι πλήρης και ως προς κάθε ισοδύναμη νόρμα.

3. Αν $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι δύο ισοδύναμες νόρμες, τότε η ανισότητα $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$, $x \in X$, είναι ισοδύναμη με την $aB_2 \subseteq B_1 \subseteq bB_2$, όπου B_i η μοναδιαία μπάλα του $(X, \|\cdot\|_i)$.

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X, X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με

$$S_y(x) = y + T(x).$$

Δείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

2. Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s) ds$$

για κάθε $t \in [0,1]$. [*Υπόδειξη:* Αν $M = \max\{|K(s,t)| : 0 \leq s, t \leq 1\}$ και $T : C[0,1] \to C[0,1]$ ο τελεστής που ορίζεται από την

$$(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t) f(s) ds,$$

δείξτε ότι $\|T^n\| \leq M^n / n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.]

3. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα: αν (x_n) ακολουθία στον X με $\|x_n\| \to 0$, τότε η $(T(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

4. Δείξτε ότι ο ℓ_p είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $L_p[0,1]$ για κάθε $p \geq 1$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τον υπόχωρο του $L_p[0,1]$ που παράγεται από τις $f_n = (n(n+1))^{1/p}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$.]

5. Στον c_{00} ορίστε νόρμα $\|\cdot\|$ με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$, αλλά οι χώροι $(c_{00},\|\cdot\|)$ και $(c_{00},\|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $T : c_{00} \to c_{00}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, η $\|x\| = \|Tx\|_\infty$ είναι νόρμα στον c_{00}.]

6. (Κριτήριο του Schur) Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geq 0$ για κάθε i,j. Υποθέτουμε ακόμα ότι υπάρχουν $b,c>0$ και $p_i>0$ ώστε, για κάθε i,j,

$$\sum_{i=1}^\infty a_{ij}p_i \leq bp_j, \qquad \sum_{j=1}^\infty a_{ij}p_j \leq cp_i.$$

Δείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από την

$$T((\xi_i)_i) = \Big(\sum_{j=1}^\infty \xi_j a_{ij}\Big)_i$$

είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$.

7. Αν $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1}\right| \leq \pi \sum_{i=0}^n x_i^2.$$

Αυτή είναι η ανισότητα του Hilbert. Θα χρειαστείτε το κριτήριο του Schur, και την

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \int_0^\infty \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.$$

1.3 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

(α) Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Έστω X ένας γραμμικός χώρος διάστασης n και έστω $\{e_1,\ldots,e_n\}$ μια βάση του πάνω από το $\mathbb{K}$. Η ℓ_1-νόρμα στον X ορίζεται ως εξής: αν $x = \sum_{i=1}^n a_ie_i \in X$, θέτουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Λήμμα 1.3.1. *Η μοναδιαία μπάλα B_1 του $(X,\|\cdot\|_1)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $(x^{(k)})$ μια ακολουθία στην B_1. Κάθε $x^{(k)}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} e_i$$

όπου $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq 1$. Ειδικότερα, για κάθε $i \leq n$ και κάθε k, έχουμε $|a_i^{(k)}| \leq 1$.

Αφού η $(a_1^{(k)})$ είναι φραγμένη, έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $a_1 \in \mathbb{K}$. Επιλέγοντας διαδοχικά υπακολουθίες, μπορούμε σε n βήματα να βρούμε αύξουσα ακολουθία δεικτών $m_1 < \cdots < m_k < \cdots$ με την ιδιότητα: για κάθε $i \leq n$,

$$a_i^{(m_k)} \to a_i \in \mathbb{K}.$$

Ορίζουμε $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Τότε,

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x^{(m_k)}\|_1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n |a_i - a_i^{(m_k)}| = 0.$$

Δηλαδή, $x^{(m_k)} \to x$. Προφανώς $x \in B_1$, άρα δείξαμε ότι η B_1 είναι ακολουθιακά συμπαγής. □

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω X ένας γραμμικός χώρος διάστασης n. Οποιεσδήποτε δύο νόρμες στον X είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ και τη νόρμα $\|\cdot\|_1$ του Λήμματος 1.3.1. Έστω $\|\cdot\|$ τυχούσα νόρμα στον X. Θα δείξουμε ότι οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα, αφού η ισοδυναμία νορμών είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S_1 = \{x \in X : \|x\|_1 = 1\}$ του $(X, \|\cdot\|_1)$, και τη συνάρτηση $f : S_1 \to \mathbb{R}^+$ με $f(x) = \|x\|$.

Η f είναι συνεχής συνάρτηση: αν $x, y \in S_1$, τότε

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \cdot \|e_i\| \leq \left(\max_{i\leq n} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\
&= \left(\max_{i\leq n} \|e_i\| \right) \|x - y\|_1.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in S_1$ (γιατί $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow x \notin S_1$) και ότι η S_1 είναι συμπαγής ως κλειστό υποσύνολο της B_1. Άρα η f παίρνει μια γνησίως θετική ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M στην S_1. Δηλαδή, αν $x \in S_1$ έχουμε

$$0 < m \leq \|x\| \leq M.$$

Αφού οι δύο νόρμες είναι θετικά ομογενείς, έπεται ότι

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες. □

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω X χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα και έστω Y χώρος με νόρμα. Κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Ορίζουμε στον X μια δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|'$ ως εξής:

$$\|x\|' = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y.$$

(ελέγξτε ότι είναι νόρμα). Οι $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $m, M > 0$ ώστε

$$m\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα,

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$, άρα ο T είναι φραγμένος. □

Πόρισμα 1.3.4. *Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε οι X και Y είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα, διάστασης $\dim X = \dim Y = n$. Αφού οι δύο χώροι έχουν την ίδια διάσταση, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Αφού η διάσταση των X και Y είναι πεπερασμένη, οι T και T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές. Άρα ο T είναι ισομορφισμός χώρων με νόρμα. □

Πόρισμα 1.3.5. *Κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Αν ένας χώρος είναι πλήρης ως προς κάποια νόρμα, τότε είναι πλήρης και ως προς κάθε ισοδύναμη νόρμα. Αν $\dim X = n$, τότε όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο X είναι πλήρης ως προς μία από αυτές. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης ως προς την

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = \max_{i\leq n} |a_i|. \quad \square$$

Πόρισμα 1.3.6. *Σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης, ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω A κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X ως προς κάποια νόρμα $\|\cdot\|$. Θα δείξουμε ότι το A είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Αφού οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες, υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε $a\|x\| \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Έστω (x_n) ακολουθία στο A. Αφού το A είναι φραγμένο ως προς την $\|\cdot\|$ υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M \implies \|x\|_1 \leq bM$ για κάθε n. Το σύνολο $(bM)B_1$ είναι συμπαγές από το Λήμμα 1.3.1, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ ως προς την $\|\cdot\|_1$. Όμως τότε,

$$\|x - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{a}\|x - x_{n_k}\|_1 \to 0,$$

άρα $x_{n_k} \to x$ ως προς την $\|\cdot\|$. Τέλος, $x \in A$ γιατί το A είναι $\|\cdot\|$-κλειστό.

Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο. □

Πόρισμα 1.3.7. *Κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y υπόχωρος του X με $\dim Y < \infty$. Από το Πόρισμα 1.3.5, ο Y είναι πλήρης, άρα είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

(β) Το Λήμμα του F. Riesz

Είδαμε ότι η μοναδιαία μπάλα ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι συμπαγής. Η συμπάγεια της μοναδιαίας μπάλας χαρακτηρίζει τους χώρους πεπερασμένης διάστασης. Η απόδειξη βασίζεται στο εξής λήμμα.

Λήμμα του Riesz. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X.*

(α) *Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $x_\varepsilon \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι τουλάχιστον $1-\varepsilon$:*

$$d(x_\varepsilon, Y) := \inf\{\|x_\varepsilon - y\| : y \in Y\} \geq 1 - \varepsilon.$$

(β) *Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι η μέγιστη δυνατή: $d(x,Y) = 1$.*

Απόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του X, επομένως μπορούμε να βρούμε $x_0 \in X \setminus Y$. Αφού ο Y είναι κλειστός,

$$d(x_0, Y) = d > 0.$$

Αφού $d/(1-\varepsilon) > d$, υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε

$$0 \neq \|x_0 - y_0\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Θεωρούμε το $x_\varepsilon = (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\| \in S_X$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε $y_0 + \|x_0 - y_0\|\, y \in Y$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y\| &= \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\| \\ &\geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $d(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

(β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση. Για το x_0 στο (α), βρίσκουμε $y_n \in Y$ με $d(x_0, y_n) \to d := d(x_0, Y)$. Η (y_n) είναι φραγμένη στον Y, επομένως έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (y_{n_k}) (τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του Y είναι συμπαγή). Αν $\lim_k y_{n_k} = y_0$, τότε $y_0 \in Y$ και $\|x_0 - y_0\| = d$. Η απόδειξη συνεχίζεται όπως στο (α). □

Πόρισμα 1.3.8. *Έστω $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα X (όλοι οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι). Τότε, μπορούμε να βρούμε μοναδιαία διανύσματα $x_n \in X_n$ ώστε $d(x_n, X_{n-1}) = 1$, $n \geq 2$.*

Ειδικότερα, σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα X μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) από μοναδιαία διανύσματα με την ιδιότητα $\|x_n - x_m\| \geq 1$ αν $n \neq m$.

Απόδειξη. Βρίσκουμε το x_n εφαρμόζοντας το δεύτερο μέρος του Λήμματος του Riesz για το ζευγάρι $X_{n-1} \subset X_n$, $\dim X_{n-1} < \infty$.

Έστω τώρα απειροδιάστατος χώρος με νόρμα X. Για την κατασκευή της ακολουθίας (x_n), επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in S_X$ και ορίζουμε $X_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$. Από το Λήμμα του Riesz υπάρχει $x_2 \in S_X$ ώστε $d(x_2, X_1) = 1$. Ορίζουμε $X_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: αν τα $x_1, \ldots, x_n$ έχουν οριστεί, θέτουμε $X_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο X είναι απειροδιάστατος, βρίσκουμε $x_{n+1} \in S_X$ ώστε $d(x_{n+1}, X_n) = 1$.

Από την κατασκευή είναι φανερό ότι αν $n < m$ τότε $x_n \in X_{m-1}$ άρα

$$\|x_n - x_m\| \geq d(x_m, X_{m-1}) = 1. \qquad \Box$$

Μπορούμε τώρα να χαρακτηρίσουμε τους χώρους πεπερασμένης διάστασης ως εξής:

Θεώρημα 1.3.9. *Ένας χώρος με νόρμα έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η μοναδιαία μπάλα του είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι αν $\dim X < \infty$ τότε η B_X είναι συμπαγής. Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) μοναδιαίων διανυσμάτων με $\|x_n - x_m\| \geq 1$ αν $n \neq m$. Η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα η B_X δεν είναι συμπαγής. $\Box$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται *θ-δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, δείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

2. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon > 0$.

(α) Έστω $x_1, \ldots, x_k \in B_X$ με την ιδιότητα: $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$. Δείξτε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ε-δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

[*Υπόδειξη για το* (α)*:* Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1 + \varepsilon/2)$ και έχουν ξένα εσωτερικά.]

3. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in B_X$ ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ να είναι ξένα.

(β) Δείξτε ότι *δεν* υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:

1. Το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x + A) = \mu(A)$ για κάθε σύνολο Borel A και κάθε $x \in X$.
2. $\mu(A) > 0$ για κάθε μη κενό ανοικτό $A \subseteq X$.
3. Υπάρχει μη κενό ανοικτό $A_0 \subset X$ με $\mu(A_0) < +\infty$.

1.4 Διαχωρισιμότητα

Έστω X χώρος με νόρμα και $D \subseteq X$. Το D λέγεται *πυκνό* στον X αν $\overline{D} = X$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in D$ με $\|x - z\| < \varepsilon$.

Ορισμός. Ο X λέγεται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $D \subset X$ που είναι πυκνό στον X.

(α) Παραδείγματα

1. Οι χώροι ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ και c_0 είναι διαχωρίσιμοι. Δείχνουμε αυτόν τον ισχυρισμό για τον ℓ_p (η περίπτωση του c_0 αφήνεται ως άσκηση).

Πρόταση 1.4.1. *Για κάθε $1 \leq p < \infty$, ο ℓ_p είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (η μιγαδική περίπτωση είναι εντελώς ανάλογη). Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{y = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots) : N \in \mathbb{N}, y_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Το D είναι αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι $\overline{D} = \ell_p$. Έστω $x = (x_n) \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$.

Η σειρά $\sum_n |x_n|^p$ συγκλίνει, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \ldots, N$ μπορούμε να βρούμε ρητό οσοδήποτε κοντά στον x_n. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ρητούς y_n , $n = 1, \ldots, N$ που να ικανοποιούν την

$$|x_n - y_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2N}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Προσθέτοντας, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Ορίζουμε $y = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$. Τότε, $y \in D$ και

$$\begin{aligned} \|x - y\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \\ &< \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού τα $x \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, έπεται το ζητούμενο. □

2. Ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος. Γενικά, για να δείξουμε ότι ένας μετρικός χώρος δεν είναι διαχωρίσιμος χρησιμοποιούμε συνήθως τον εξής ισχυρισμό.

Λήμμα 1.4.2. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε $x_i, i \in I$ στον X και $a > 0$ που ικανοποιούν το εξής:*

$$\text{για κάθε } i \neq j \in I \quad d(x_i, x_j) \geq a.$$

Τότε, για κάθε πυκνό $D \subseteq X$ έχουμε $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(D)$.

Απόδειξη. Οι μπάλες $D(x_i, a/2)$, $i \in I$ είναι ξένες. Αν το D είναι πυκνό, σε κάθε $D(x_i, a/2)$ υπάρχει κάποιο $d_i \in D$. Αν $i \neq j$, τότε $d_i \neq d_j$ αφού $D(x_i, a/2) \cap D(x_j, a/2) = \emptyset$. Άρα, η $f : I \to D$ με $f(i) = d_i$ είναι ένα προς ένα. Δηλαδή, το D έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το I. □

Στην περίπτωση του ℓ_∞, θεωρούμε το σύνολο $A = \{x = (x_n) : x_n \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε ακολουθία με όρους 0 ή 1 είναι φραγμένη, άρα $A \subseteq \ell_\infty$.

Παρατηρούμε ότι αν $x = (x_n), y = (y_n) \in A$ και $x \neq y$, τότε $\|x - y\|_\infty = 1$. Σύμφωνα με το λήμμα, αν D είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_∞, τότε το D έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το A. Όμως, το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor δείχνει ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο. Συνεπώς, ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

3. Ο $B[a, b]$ και ο $L_\infty[a, b]$ δεν είναι διαχωρίσιμοι χώροι (άσκηση). Από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass προκύπτει ότι ο $C[a, b]$ είναι διαχωρίσιμος (άσκηση: εφαρμόστε το κριτήριο της Άσκησης 1 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο χώρος $P[a, b]$ των πολυωνύμων είναι πυκνός στον $C[a, b]$). Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε ότι, γενικότερα, αν K είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος.

(β) Διαχωρισιμότητα του $C(K)$

Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος. Η απόδειξη θα βασιστεί στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.4.3 (διαμερίσεις της μονάδας). *Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι $K = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, όπου $V_1, \ldots, V_n$ ανοικτά σύνολα. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : K \to [0, 1]$ με $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, ώστε $\phi_1(x) + \cdots + \phi_n(x) = 1$ για κάθε $x \in K$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in K$ μπορούμε να βρούμε $i(x) \leq n$ και ανοικτή περιοχή W_x του x ώστε $\overline{W_x} \subset V_{i(x)}$. Από τη συμπάγεια του K, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ ώστε $K = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}$.

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, ορίζουμε H_i να είναι η ένωση εκείνων των $\overline{W_{x_j}}$, $j \leq m$ τα οποία περιέχονται στο V_i. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Urysohn, βρίσκουμε συνεχείς συναρτήσεις $g_i : K \to [0, 1]$ με την ιδιότητα: $g_i \equiv 1$ στο H_i και $\mathrm{supp}(g_i) \subset V_i$.

Τώρα, ορίζουμε τις $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= g_1 \\
\phi_2 &= (1 - g_1)g_2 \\
\cdots & \quad \cdots \\
\phi_n &= (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{n-1})g_n.
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό των ϕ_i έχουμε $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq \mathrm{supp}(g_i) \subset V_i$. Επαγωγικά ελέγχουμε ότι $\phi_1 + \cdots + \phi_k = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - g_i)$. Συνεπώς,

$$\phi_1 + \cdots + \phi_n = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - g_i) \equiv 1,$$

αφού κάθε $x \in K$ ανήκει σε κάποιο H_i και $1 - g_i \equiv 0$ στο H_i. □

Θεώρημα 1.4.4. *Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Για κάθε $f \in C(K)$ ορίζουμε

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x,y) \leq \delta\}.$$

Παρατηρήστε ότι το γεγονός ότι η f είναι συνεχής (ισοδύναμα, ομοιόμορφα συνεχής) περιγράφεται ισοδύναμα από την $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και καλύπτουμε τον K με πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $D(x_j, \delta)$, $j = 1, \ldots, N$. Από το Λήμμα 1.4.3 υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : K \to [0,1]$ με $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq D(x_i, \delta)$ $(i = 1, \ldots, N)$, ώστε $\phi_1(x) + \cdots + \phi_N(x) = 1$ για κάθε $x \in K$. Θέτουμε $F_\delta = \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$.

Ισχυρισμός. $\operatorname{dist}(f, F_\delta) \leq \omega_f(\delta)$.
Πράγματι, αν ορίσουμε $g = \sum_{i=1}^N f(x_i)\phi_i$, τότε $g \in F_\delta$ και, για κάθε $y \in K$,

$$|f(y) - g(y)| = \left|\sum_{i=1}^N f(y)\phi_i(y) - \sum_{i=1}^N f(x_i)\phi_i(y)\right| \leq \sum_{i=1}^N \phi_i(y)|f(y) - f(x_i)|,$$

και, λόγω των $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq D(x_i, \delta)$, το τελευταίο άθροισμα ισούται με

$$\sum_{\{i : y \in D(x_i,\delta)\}} \phi_i(y)|f(y) - f(x_i)| \leq \omega_f(\delta) \sum_{\{i : y \in D(x_i,\delta)\}} \phi_i(y) \leq \omega_f(\delta).$$

Τώρα, από τον ισχυρισμό και από την $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $C(K) = \overline{\cup_{n=1}^\infty F_{1/2^n}}$. Αφού κάθε $F_{1/2^n}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος (Άσκηση 1). □

(γ) Διαχωρισιμότητα του $L_p(K, \mathcal{B}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$

Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Γράφουμε $\mathcal{B}$ για την σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του K.

Θεώρημα 1.4.5. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(K, \mathcal{B})$. Για κάθε $1 \leq p < \infty$, ο $L_p(K, \mathcal{B}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Περιγράφουμε τα βήματα της απόδειξης. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B} : \text{υπάρχει}\ f_n \in C(K) : 0 \leq f_n \leq 1 \text{ και } \|f_n - \chi_A\|_p \to 0\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, δείχνοντας διαδοχικά ότι είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, περιέχει το K, είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και ως προς αύξουσες ενώσεις (άσκηση).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι κάθε ανοικτό $U \subseteq K$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Πράγματι, αν U είναι ανοικτό υποσύνολο του K και αν ορίσουμε $f_n : K \to [0,1]$ με

$$f_n(x) = \frac{nd(x, K \setminus U)}{1 + nd(x, K \setminus U)},$$

τότε $f_n \to \chi_U$ και, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $\|f_n - \chi_U\|_p \to 0$.

Έπεται ότι $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ και αυτό δείχνει ότι οι απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $\phi : K \to \mathbb{R}$ προσεγγίζονται από συνεχείς με την $\| \cdot \|_p$.

Αφού ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ και $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(X))^{1/p}$, παρατηρούμε ότι ο $(C(K), \| \cdot \|_p)$ είναι διαχωρίσιμος. Οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L_p(K, \mathcal{B}, \mu)$, συνεπώς ο $L_p(K, \mathcal{B}, \mu)$ είναι διαχωρίσιμος. □

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι ο $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν $f \in L_p$ και αν θέσουμε $f_n = \chi_{[-n,n]} \cdot f$, τότε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Δηλαδή, ο υπόχωρος που αποτελείται από τις $g \in L_p$ που μηδενίζονται έξω από κάποιο διάστημα $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι πυκνός στον L_p. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μπορούμε να αναχθούμε στο Θεώρημα 1.4.5. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για τον $L_p(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ (άσκηση).

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με την ιδιότητα ο υπόχωρος $\mathrm{span}(A)$ να είναι πυκνός στον X. Δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

2. Δείξτε ότι ο c_0 είναι διαχωρίσιμος.

3. Δείξτε ότι ο $C[a, b]$ είναι διαχωρίσιμος, ενώ ο $B[a, b]$ όχι. Εξετάστε αν ο $L_\infty[0, 1]$ είναι διαχωρίσιμος.

4. Δείξτε ότι, για κάθε $d \in \mathbb{N}$ και για κάθε $1 \leq p < \infty$, ο $L_p(\mathbb{R}^d)$ είναι διαχωρίσιμος.

1.5 Χώρος πηλίκο

Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Z ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον X ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in Z.$$

Ο χώρος πηλίκο X/Z είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[x] = x + Z$, το οποίο γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[x] + [y] = [x + y] \ , \ \ a[x] = [ax].$$

Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι η κλάση $[0] = Z$.

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\| \cdot \|_0 : X/Z \to \mathbb{R}^+$ μέσω της

$$\|[x]\|_0 = \inf\{\|y\| : y \sim x\} = \inf\{\|x - z\| : z \in Z\}.$$

Πρόταση 1.5.1. *Αν ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X, τότε η $\| \cdot \|_0$ είναι νόρμα στον X/Z.*

Απόδειξη. (α) Προφανώς $\|[x]\|_0 \geq 0$, και αν $\|[x]\|_0 = 0$ τότε υπάρχουν $z_n \in Z$ ώστε $\|x - z_n\| \to 0$. Δηλαδή,

$$x = \lim_n z_n \in \overline{Z} = Z$$

αφού ο Z είναι κλειστός. Όμως αυτό σημαίνει ότι $[x] = [0]$.

Αντίστροφα, $\|[0]\|_0 = \inf\{\|z\| : z \in Z\} = 0$, αφού ο Z είναι υπόχωρος.

(β) Αν $a \neq 0$, χρησιμοποιώντας την $aZ = Z$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|a[x]\|_0 = \|[ax]\|_0 &= \inf\{\|ax - z\| : z \in Z\} = \inf\{\|ax - az\| : z \in Z\} \\ &= \inf\{|a|\|x - z\| : z \in Z\} = |a|\|[x]\|_0.\end{aligned}$$

(γ) Ομοίως, αφού $Z + Z = Z$,

$$\begin{aligned}\|[x] + [y]\|_0 = \|[x + y]\|_0 &= \inf\{\|x + y - z\| : z \in Z\} \\ &= \inf\{\|x + y - (z_1 + z_2)\| : z_1, z_2 \in Z\} \\ &\leq \inf\{\|x - z_1\| + \|y - z_2\| : z_1, z_2 \in Z\} \\ &= \inf\{\|x - z_1\| : z_1 \in Z\} + \inf\{\|y - z_2\| : z_2 \in Z\} \\ &= \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0. \quad \square\end{aligned}$$

Ο χώρος $(X/Z, \|\cdot\|_0)$ λέγεται *χώρος πηλίκο* του X (με τον Z).

Πρόταση 1.5.2. *Η φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Z$ με $Q(x) = [x]$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|Q\| \leq 1$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του Q ελέγχεται εύκολα. Επίσης, αφού $0 \in Z$,

$$\|Q(x)\|_0 = \|[x]\|_0 = \inf\{\|x - z\| : z \in Z\} \leq \|x\|.$$

Άρα, $\|Q\| \leq 1$. $\square$

Πρόταση 1.5.3. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T \in B(X, Y)$ και $Z = \mathrm{Ker}(T)$. Ορίζουμε $T_0 : X/Z \to Y$ με $T_0([x]) = T(x)$. Τότε, ο T_0 είναι ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T_0\| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X γιατί ο T είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε τον χώρο πηλίκο X/Z . Αφού $Z = \mathrm{Ker}(T)$ έχουμε

$$[x] = [x_1] \Longrightarrow x - x_1 \in \mathrm{Ker}(T) \Longrightarrow T(x) = T(x_1),$$

δηλαδή ο T_0 ορίζεται καλά. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T_0 είναι ένα προς ένα, γραμμικός τελεστής. Επίσης, αν $x \in X$ τότε

$$\|T_0([x])\| = \|T_0[x - z]\| = \|T(x - z)\| \leq \|T\| \cdot \|x - z\|$$

για κάθε $z \in Z$, άρα

$$\|T_0([x])\| \leq \|T\| \cdot \|[x]\|_0.$$

Δηλαδή, ο T_0 είναι φραγμένος και $\|T_0\| \leq \|T\|$.

Έστω $0 < \varepsilon < \|T\|$ και έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $\|T(x)\| > \|T\| - \varepsilon$. Τότε, $\|T_0([x])\| = \|T(x)\| > \|T\| - \varepsilon$ και $\|[x]\|_0 \leq \|x\| = 1$. Άρα,

$$\|T_0\| \geq \frac{\|T_0([x])\|}{\|[x]\|_0} > \|T\| - \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|T_0\| \geq \|T\|$. Δηλαδή, $\|T_0\| = \|T\|$. $\square$

Πρόταση 1.5.4. *Εστω X χώρος Banach και έστω Z κλειστός υπόχωρος του X. Τότε, ο X/Z είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω $([x_n])$ ακολουθία Cauchy στον X/Z. Θα δείξουμε ότι η $([x_n])$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Αφού η $([x_n])$ είναι Cauchy, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία δεικτών $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ για την οποία

$$\|[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]\|_0 = \|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\|_0 < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $z_k \in Z$ ώστε

$$\|(x_{n_{k+1}} - z_{k+1}) - (x_{n_k} - z_k)\| < \frac{1}{2^k}.$$

Η επιλογή των z_k γίνεται ως εξής: θέτουμε $z_1 = 0$. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $z_1, \ldots, z_k$. Αφού $\|[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]\|_0 < 1/2^{k+1}$, υπάρχει $y_{k+1} \in Z$ με την ιδιότητα $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{k+1}\| < 1/2^k$. Θέτουμε $z_{k+1} = z_k + y_{k+1}$, οπότε

$$\|(x_{n_{k+1}} - z_{k+1}) - (x_{n_k} - z_k)\| = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Η ακολουθία $(x_{n_k} - z_k)$ είναι Cauchy στον X, επομένως υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_{n_k} - z_k \to x_0$. Από την Πρόταση 1.5.2 έπεται ότι $Q(x_{n_k} - z_k) \to Q(x_0)$, δηλαδή $[x_{n_k}] \to [x_0]$. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια τυπική εφαρμογή των χώρων πηλίκων.

Πρόταση 1.5.5. *Έστω X χώρος με νόρμα, Z κλειστός υπόχωρος του X και Y υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε, ο $Z+Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Z$. Αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, ο $Q(Y)$ είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X/Z, άρα κλειστός υπόχωρος του X/Z. Αφού η Q είναι συνεχής απεικόνιση, ο $Q^{-1}(Q(Y))$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Όμως,

$$x \in Q^{-1}(Q(Y)) \iff Q(x) \in Q(Y) \iff \exists y \in Y : x - y \in Z \iff x \in Y + Z. \qquad \square$$

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν οι Y και X/Y είναι χώροι Banach, τότε ο X είναι χώρος Banach.

2. Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον Z. Είναι οι X/Y και X/Z ισόμορφοι; [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τους $X = \ell_2$, $Y = \{x \in \ell_2 : x_1 = 0\}$ και $Z = \{x \in \ell_2 : x_1 = x_2 = 0\}$.]

3. Έστω X γραμμικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \to Y$. Θέτουμε $Z = \mathrm{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y,z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y,z) \in Y \times Z$.

(α) Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφος με τον X.

(β) Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z και ο X/Z είναι ισόμορφος με τον Y.

1.6 Στοιχειώδης θεωρία χώρων Hilbert

(α) Χώροι Hilbert

Ορισμός. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μιά συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\langle x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, για κάθε $x, y \in X$.

(γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι γραμμική.

Πρόταση 1.6.1. (ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y \rangle|$. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y \rangle = Me^{i\theta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \overline{\lambda \langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &= r^2 \langle x, x \rangle + 2\mathrm{Re}(rMe^{i(\theta + t)}) + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\theta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$r^2 \langle x, x \rangle - 2rM + \langle y, y \rangle \geq 0$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y, y \rangle}/\sqrt{\langle x, x \rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leq \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μάς επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 1.6.2. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έχουμε δεί ότι οι $(x,y) \to x+y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι κι αυτό συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$:

Πρόταση 1.6.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \quad \square$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x, y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X.

Ορισμός. Ένας χώρος Banach λέγεται *χώρος Hilbert* αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον X ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ για κάθε $x \in X$.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με H. Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον *κανόνα του παραλληλογράμμου*: για κάθε $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(β) Καθετότητα

Ορισμός. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι τα $x, y \in X$ είναι *ορθογώνια* (*ή κάθετα*) και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$. Αν $x \in X$ και M είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, λέμε ότι το x είναι κάθετο στο M και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.

Παρατηρήσεις. 1. Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.

2. Αν $x \perp y$, ισχύει το *Πυθαγόρειο θεώρημα*: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ορισμός. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω M γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε

$$M^{\perp} = \{x \in X : \forall y \in M, \ \ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X (άσκηση).

Πρόταση 1.6.4. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ ώστε*

$$\|x - y_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}.$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, και ονομάζεται προβολή του x στον M.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = d(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2\\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2\\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2.\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός) και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2\\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$. □

Πρόταση 1.6.5. *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 1.6.4, $x - P_M(x) \perp M$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το w δεν είναι κάθετο στον M. Τότε, υπάρχει $z \in M$ ώστε $\langle w, z\rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z\rangle \\ &= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z\rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\ &= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$. □

Πόρισμα 1.6.6. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

Πόρισμα 1.6.7. *Ένας γραμμικός υπόχωρος F του H είναι πυκνός αν και μόνο αν το μοναδικό διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον F είναι το 0.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο F είναι πυκνός στον H, και ότι $\langle z, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in F$.

Έστω $y \in H$. Αφού ο F είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to y$. Τότε, $0 = \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$. Άρα, $\langle z, y\rangle = 0$. Αφού $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$, έχουμε $z = 0$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι πυκνός στον H. Τότε, ο $\overline{F}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Άρα, υπάρχει $z \neq 0$, $z \perp \overline{F}$.

Ειδικότερα, $z \perp F$, άτοπο. □

Θεώρημα 1.6.8. *Έστω H χώρος Hilbert, και M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Τότε, $H = M \oplus M^\perp$. Δηλαδή, κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M,\ x_2 \in M^\perp.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Τότε, $P_M(x) \in M$ και $x - P_M(x) \in M^\perp$.

Αν $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ και $x_1, x_1' \in M$, $x_2, x_2' \in M^\perp$, τότε το

$$y = x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in M \cap M^\perp$$

γιατί οι $M, M^\perp$ είναι υπόχωροι, άρα $y \perp y$, το οποίο σημαίνει ότι $y = 0$. Άρα, $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$, απ' όπου έπεται η μοναδικότητα. □

Πόρισμα 1.6.9. *Έστω $M \neq \{0\}$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Ορίζουμε $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = P_M(x_1 + x_2) = x_1$, όπου $x = x_1 + x_2$ όπως στο Θεώρημα. Ο P_M είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|P_M\| = 1$.*

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο P_M είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

δηλαδή ο P_M είναι φραγμένος, και $\|P_M\| \leq 1$. Αν $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, τότε $P_M(x_0) = x_0$. Άρα,

$$\|P_M\| \geq \frac{\|P_M(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1. \quad \square$$

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Θα δούμε ότι ο H^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο από τα στοιχεία του H.

Λήμμα 1.6.10. *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ ανήκει στον H^*, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle \lambda x + \mu y, a\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle y, a\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\| \, \|x\|.$$

Άρα, $f_a \in H^*$ και $\|f_a\| \leq \|a\|$. Τέλος, αν $a \neq 0$,

$$\|f_a\| \geq \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{|\langle a, a\rangle|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Αν $a = 0$, προφανώς $\|f_a\| = 0$ ($f_a \equiv 0$). $\square$

Αντίστροφα, κάθε $f \in H^*$ αναπαρίσταται στη μορφή $f = f_a$ για κάποιο $a \in H$:

Θεώρημα 1.6.11. (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) *Έστω H χώρος Hilbert, και $f \in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a \in H$ ώστε $f = f_a$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M = \mathrm{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Ο M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $M = H$, τότε $f \equiv 0$ και $f = f_0$.

Αν $M \neq H$, τότε υπάρχει $z \neq 0$, $z \in H$ που είναι κάθετο στον M. Τότε, για κάθε $y \in H$ έχουμε

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0.$$

Άρα $f(z)y - f(y)z \in M$, και αφού $z \perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle f(z)y - f(y)z, z\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z)\langle y, z\rangle = f(y)\langle z, z\rangle \\ &\Longrightarrow \quad f(y) = \Big\langle y, \frac{\overline{f(z)}z}{\|z\|^2}\Big\rangle = f_a(y), \end{aligned}$$

όπου $a = \overline{f(z)}z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του a είναι απλή. Αν $f(y) = \langle y, a\rangle = \langle y, a'\rangle$ για κάθε $y \in H$, τότε $a - a' \perp y$ για κάθε $y \in H$. Άρα, $a = a'$. $\square$

Πόρισμα 1.6.12. *Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = f_a$ είναι αντιγραμμική ισομετρία και επί.*

Σημείωση. Λέγοντας ότι η T είναι *αντιγραμμική*, εννοούμε ότι $T(\lambda a + \mu a') = \overline{\lambda}T(a) + \overline{\mu}T(a')$ για κάθε $a, a' \in H$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. (α) Για την αντιγραμμικότητα της T, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a+\mu a'}(x) = \langle x, \lambda a + \mu a'\rangle = \overline{\lambda}\langle x, a\rangle + \overline{\mu}\langle x, a'\rangle = \overline{\lambda}f_a(x) + \overline{\mu}f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a + \mu a') = f_{\lambda a+\mu a'} = \overline{\lambda}f_a + \overline{\mu}f_{a'} = \overline{\lambda}T(a) + \overline{\mu}T(a').$$

(β) Από το Λήμμα 1.6.10 έχουμε $\|T(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$. Δηλαδή, η T είναι ισομετρία.
(γ) Αν $f \in H^*$, υπάρχει $a \in H$ ώστε $T(a) = f_a = f$, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η T είναι επί. □

Θεώρημα 1.6.13. *Έστω M κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H και έστω $f \in M^*$. Υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ ώστε $\tilde{f}|_M = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{M^*}$.*

Απόδειξη. Ο M είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας δίνει μοναδικό $w \in M$ ώστε

$$f(x) = \langle x, w\rangle, \quad x \in M.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = \langle x, w\rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, επεκτείνει το f, και

$$\|f\|_{M^*} = \|w\| = \|\tilde{f}\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H, υπάρχει $u \in H$ ώστε

$$g(x) = \langle x, u\rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle x, w - u\rangle = 0$ για κάθε $x \in M$, οπότε $w - u = z \in M^\perp$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα, και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|\tilde{f}\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = 0 \implies w = u$. Έπεται ότι $g = \tilde{f}$. □

(γ) Ορθοκανονικές βάσεις

Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ (1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$). Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια στον X, τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j.$$

Ορισμός. Έστω H χώρος Hilbert. Μιά μεγιστική (με την έννοια του εγκλεισμού) ορθοκανονική οικογένεια λέγεται *ορθοκανονική βάση* του H. Παρατηρήστε ότι αν μιά ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H τότε

$$H = \overline{\mathrm{span}}\{e_i : i \in I\}.$$

Αυτό είναι συνέπεια του Πορίσματος 1.6.7. Επίσης, χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Zorn μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση.

Πρόταση 1.6.14. *Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H και για κάθε $x \in H$ έχουμε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_i : i \in I\}$ του H είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i \neq e_j$ είναι στοιχεία της βάσης, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. Θεωρούμε λοιπόν μια ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα).

Ισχυρισμός. Για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|.$$

Πράγματι, έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Παρατηρούμε ότι

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \langle x, e_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Άρα,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Έστω $x \in X$, και $\varepsilon > 0$. Αφού $H = \overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \right\| < \varepsilon.$$

Όμως τότε, για κάθε $M > N$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{i=1}^{M} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| &= d(x, \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_M\}) \\ &\leq d(x, \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}) \\ &\leq \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \right\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \to x$ καθώς το $M \to \infty$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n. \qquad \square$$

Πρόταση 1.6.15. *Έστω $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Τότε,*

(α) *Ισχύει η ανισότητα του Bessel*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle)^2 \leq \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

(β) *Αν η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε ισχύει η ισότητα του Parseval*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle)^2 = \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

(γ) *Αν η ισότητα του Parseval ισχύει για κάθε $x \in H$, τότε η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.*

(δ) *Αν $\overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\} = H$, τότε η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.*

Απόδειξη. (α) Στην απόδειξη της Πρότασης 1.6.14 είδαμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq d^2(x, \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την ανισότητα του Bessel.

(β) Αν η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε η Πρόταση 1.6.14 δείχνει ότι $\lim_{n\to\infty} d(x, \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = 0$. Συνεπώς,

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = d^2(x, \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) \to 0,$$

απ' όπου παίρνουμε την ισότητα του Parseval.

(γ) Αν η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του H, τότε $\overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \neq H$. Συνεπώς, υπάρχει $y \neq 0$ στον H με την ιδιότητα $y \perp e_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Όμως τότε, από την ισότητα του Parseval παίρνουμε

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, e_i \rangle|^2 = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(δ) Έστω ότι $\overline{\mathrm{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\} = H$ και ότι η $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του H. Επιλέγουμε μη μηδενικό y με την ιδιότητα $y \perp e_i$, $i \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν $z_m \in \mathrm{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ώστε $z_m \to y$. Τότε, έχουμε $\langle y, z_m\rangle = 0$ για κάθε m, άρα

$$\langle y, y\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle z_m, y\rangle = 0,$$

δηλαδή $y = 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 1.6.16. (Riesz-Fisher) *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2.*

Απόδειξη. Ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle, \dots).$$

(α) Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.
(β) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.
(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$, άρα ο T είναι ισομετρία (ειδικότερα, είναι ένα προς ένα).
(δ) Έστω $(a_1, \dots, a_n, \dots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{n=1}^N a_n e_n$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (x_N) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m\rangle = a_m.$$

Άρα, $\langle x, e_m\rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m\rangle)_{m\in\mathbb{N}} = (a_m)_{m\in\mathbb{N}},$$

άρα ο T είναι επί. □

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω $x, y \in X$. Δείξτε ότι
(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$.
(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$.

2. Έστω H χώρος Hilbert και έστω x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H με την ιδιότητα $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μια μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

5. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

6. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι
(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A$.

7. Έστω H χώρος Hilbert και έστω Y υπόχωρος του H. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

8. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

9. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^{\perp}$.

10. Έστω H χώρος Hilbert και έστω W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

11. Στο χώρο $C[-1,1]$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

(α) Αν $F = \{f \in C[-1,1] : \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$, βρείτε τον $F^{\perp}$.

(β) Αν $G = \{f \in C[-1,1] : \int_{0}^{1} f(t)dt = 0\}$, βρείτε τον $G^{\perp}$ και αποδείξτε ότι $G^{\perp\perp} \neq G$.

12. Σε έναν χώρο Hilbert H δίνεται ένας γραμμικός τελεστής $T : H \to H$ με τις ιδιότητες: $T^2 = T$, $\|T\| \leq 1$. Αν $F = \mathrm{Ker}T$, δείξτε ότι:
(α) $T(H) \subseteq F^{\perp}$.
(β) Ο T είναι η ορθογώνια προβολή στον $F^{\perp}$.

13. Έστω H χώρος Hilbert και έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ ώστε

$$T(x) = \langle x, u \rangle v, \quad x \in H.$$

Υπόδειξη: Υπάρχει $v \in H$ ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

14. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

15. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του διαχωρίσιμου χώρου Hilbert H και έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

16. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H, και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n \rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n \rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

17. Έστω H χώρος Hilbert και έστω (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Δείξτε ότι η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Κεφάλαιο 2

Θεώρημα Hahn-Banach

2.1 Γραμμικά συναρτησοειδή και υπερεπίπεδα

Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Λέμε ότι ένας γραμμικός υπόχωρος W του X έχει *πεπερασμένη συνδιάσταση* $k \in \mathbb{N}$ αν $\dim(X/W) = k$. Αν ο X/W έχει συνδιάσταση 1 και $x_0 \in X$, τότε το $x_0 + W$ λέγεται *υπερεπίπεδο* του X.

Παρατήρηση Έχουμε $\dim(X/W) = k$ αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $w \in W$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ ώστε

$$(*) \qquad x = w + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k.$$

Πράγματι, αν $\dim(X/W) = k$ και $\{[x_1], \ldots, [x_k]\}$ είναι μία βάση του X/W, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ με $[x] = a_1[x_1] + \cdots + a_k[x_k] = [a_1x_1 + \cdots + a_kx_k]$, δηλαδή $x - (a_1x_1 + \cdots + a_kx_k) =: w \in W$. Επίσης,

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0 \Longrightarrow a_1[x_1] + \cdots + a_k[x_k] = [0] \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_k = 0,$$

δηλαδή τα $x_1, \ldots, x_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από την ανεξαρτησία των $[x_i]$ έπεται και η μοναδικότητα της παράστασης του x στην $(*)$. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες, καθώς και την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης.

Ειδικότερα, αν $\dim(X/W)$ και x_0 είναι τυχόν στοιχείο του $X \setminus W$, τότε κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = w + ax_0$ όπου $w \in W$ και $a \in \mathbb{K}$.

Οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των μη τετριμμένων γραμμικών συναρτησοειδών:

Πρόταση 2.1.1. *Έστω X γραμμικός χώρος και έστω W υπόχωρος του X. Ο W έχει συνδιάσταση 1 αν και μόνο αν υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, με $\mathrm{Ker}f = W$.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{K}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας $W = \mathrm{Ker}f$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε $\tilde{f} : X/W \to \mathbb{K}$ με $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Το $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένο, ένα προς ένα και επί, δηλαδή γραμμικός ισομορφισμός. Άρα, $\dim(X/W) = \dim(\mathbb{K}) = 1$.

Αντίστροφα, αν $\dim(X/W) = 1$, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : X/W \to \mathbb{K}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{K}$ με $f(x) = T(Q(x))$, όπου $Q(x) = [x] = x + W$ η φυσιολογική απεικόνιση. Το f είναι μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές και $\mathrm{Ker}f = W$. □

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον γραμμικό χώρο X.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω W υπόχωρος του X συνδιάστασης 1. Τότε, ο W είναι κλειστός υπόχωρος του X ή πυκνός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. Ο $\overline{W}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \overline{W} \setminus W$, τότε οι αρχικές μας παρατηρήσεις δείχνουν ότι κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = w + ax_0$ για κάποια $w \in W$ και $a \in \mathbb{K}$. Αφού $x_0 \in \overline{W}$ και $W \subset \overline{W}$, αυτό σημαίνει ότι $X \subseteq \overline{W}$. Δηλαδή, ο W είναι πυκνός. □

Οι κλειστοί υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των φραγμένων μη μηδενικών γραμμικών συναρτησοειδών. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 2.1.3. *Έστω X γραμμικός χώρος. Δύο γραμμικά συναρτησοειδή $f, g : X \to \mathbb{K}$ έχουν τον ίδιο πυρήνα αν και μόνο αν υπάρχει $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $g = bf$.*

Απόδειξη. Αν $g = bf$, $b \neq 0$, τότε προφανώς $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$.

Αντίστροφα, έστω $f, g : X \to \mathbb{K}$ γραμμικά συναρτησοειδή με $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αν $f \equiv 0$, τότε $g \equiv 0$ και $g = 1 \cdot f$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f \neq 0$, οπότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$. Αφού $f(x_0) \neq 0$, έχουμε $g(x_0) \neq 0$. Για κάθε $x \in X$,

$$f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0 \Longrightarrow g(x - f(x)x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = g(x_0)f(x).$$

Δηλαδή, $g = bf$ όπου $b = g(x_0)$. □

Πρόταση 2.1.4. *Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, $f \in X^*$ αν και μόνο αν ο $\mathrm{Ker}f$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Αν το f είναι συνεχές, τότε ο $\mathrm{Ker}f$ είναι προφανώς κλειστός. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές και ότι ο $\mathrm{Ker}f$ είναι κλειστός.

Θεωρούμε τον χώρο πηλίκο $X/\mathrm{Ker}f$ και την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/\mathrm{Ker}f$. Από την Πρόταση 2.1.1, ο $X/\mathrm{Ker}f$ έχει διάσταση 1, άρα υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : X/\mathrm{Ker}f \to \mathbb{K}$. Οι Q και T είναι συνεχείς, άρα η $g := T \circ Q : X \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Παρατηρούμε ότι $g(x) = 0$ αν και μόνο αν $Q(x) = [x] = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \mathrm{Ker}f$. Αφού $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Ker}f$, το Λήμμα 2.1.3 δείχνει ότι $f = bg$ για κάποιο $b \neq 0$, $b \in \mathbb{K}$. Η συνέχεια του f έπεται τώρα από τη συνέχεια του g. □

Ασκήσεις

1. Έστω X γραμμικός χώρος και έστω W υπόχωρος του X. Δείξτε ότι $\dim(X/W) = k$ αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, \dots, x_k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $w \in W$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $x = w + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$.

2. Έστω X γραμμικός χώρος και έστω $H \subset X$. Δείξτε ότι το H είναι υπερεπίπεδο αν και μόνο αν υπάρχουν $t \in \mathbb{K}$ και μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $H = \{x \in X : f(x) = t\}$.

2.2 Το Λήμμα του Zorn

(α) Έστω P ένα μη κενό σύνολο. Μία σχέση $\leq$ στο P λέγεται *μερική διάταξη* αν ικανοποιεί τα εξής:

(1) για κάθε $a \in P$, $a \leq a$ (ανακλαστική ιδιότητα)

(2) αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)

(3) αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Το P λέγεται *μερικά διατεταγμένο* ως προς την $\leq$. Από τον ορισμό φαίνεται ότι μπορεί στο P να υπάρχουν a και b για τα οποία να μην ισχύει καμία από τις $a \leq b$ και $b \leq a$ (τότε, λέμε ότι τα a και b *δεν συγκρίνονται*.) Τα a και b *συγκρίνονται* αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $a \leq b$ ή $b \leq a$.

(β) Ένα μη κενό υποσύνολο C του P λέγεται *ολικά διατεταγμένο* (ή *αλυσίδα*) αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συγκρίνονται.

(γ) Αν $A \neq \emptyset$, $A \subseteq P$ και $b \in P$, λέμε ότι το b είναι *άνω φράγμα* για το A αν: για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \leq b$. Ένα υποσύνολο A του P μπορεί να έχει ή να μην έχει άνω φράγμα.

(δ) Το $m \in P$ λέγεται *μεγιστικό στοιχείο* του P αν: για κάθε $a \in P$ με $m \leq a$ ισχύει $m = a$. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει στοιχείο του P γνήσια μεγαλύτερο από το m. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο P μπορεί να έχει ή να μην έχει μεγιστικά στοιχεία.

Παραδείγματα (1) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο που δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(2) Έστω $X \neq \emptyset$ και $M = \mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X (το *δυναμοσύνολο* του X). Ορίζουμε $\leq$ στο M ως εξής:

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B.$$

Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο M (και αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχουν $A, B \in M$ που δεν συγκρίνονται: πάρτε π.χ. A μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του X, και $B = X \setminus A$.) Το M έχει *ένα* (ακριβώς) μεγιστικό στοιχείο, το X.

(3) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών. Αν $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, λέμε ότι $x \leq y$ αν $\xi_i \leq \eta_i$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το M είναι μερικά διατεταγμένο ως προς την $\leq$, και δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(4) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, και λέμε ότι $m \leq n$ αν ο m διαιρεί τον n. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N}$ (τα στοιχεία 3 και 7 του $\mathbb{N}$ δεν συγκρίνονται.) Το $A = \{2^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία ως προς την $\leq$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ των *πρώτων αριθμών* με την ίδια διάταξη $\leq$, τότε κάθε στοιχείο του P είναι μεγιστικό. Πάλι με την $\leq$, το $\{2, 3, 4, 8\}$ έχει *δύο* μεγιστικά στοιχεία: το 3 και το 8 (ελέγξτε τους παραπάνω ισχυρισμούς.)

Λήμμα του Zorn *Έστω $P \neq \emptyset$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο ως προς την $\leq$. Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα $C \subseteq P$ έχει άνω φράγμα στο P. Τότε, το P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Το Λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής και θα το δεχτούμε σαν αξίωμα.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει βάση. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε το σύνολο P όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του X με διάταξη την $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Δείξτε ότι το $(P, \leq)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος του Zorn.]

2. Δείξτε ότι κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση.

2.3 Το Θεώρημα Hahn - Banach

Ορισμός. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και έστω $p : X \to \mathbb{R}$. Το p λέγεται *υπογραμμικό συναρτησοειδές*, αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(β) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$,

δηλαδή, αν είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Παρατηρήστε ότι: δεν απαιτούμε το p να παίρνει μη αρνητικές τιμές, ούτε την $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Εύκολα ελέγχονται οι $p(0) = 0$ και $p(-x) \geq -p(x)$.

Παραδείγματα (α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, τότε τα $f, |f|$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

(β) Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(γ) Η $p : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $p((\xi_k)) = \mathrm{limsup}\xi_k$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞.

Θεώρημα 2.3.1 (Θεώρημα επέκτασης του Hahn). *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και έστω $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω W γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : W \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W$,*

$$(*) \qquad f(x) \leq p(x).$$

Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ ώστε

(α) $\tilde{f}(x) = f(x)$ αν $x \in W$ (το $\tilde{f}$ είναι επέκταση του f),

(β) $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρήστε ότι δεν υποθέτουμε καμία τοπολογική δομή για το χώρο X (είναι απλώς ένας γραμμικός χώρος.) Όπως θα δούμε, το ουσιαστικό βήμα της απόδειξης είναι πώς θα επεκτείνουμε το f από έναν υπόχωρο W_1 σε έναν υπόχωρο W_2 που έχει «μία διάσταση παραπάνω», με γραμμικό τρόπο και χωρίς να χαλάσει η $(*)$. Από τη στιγμή που αυτό είναι δυνατό, το Λήμμα του Zorn μάς εξασφαλίζει μιά «μεγιστική επέκταση» $\tilde{f}$, κι αυτή υποχρεούται να έχει πεδίο ορισμού ολόκληρον τον X.

Λήμμα 2.3.2. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, ας υποθέσουμε επιπλέον ότι για κάποιον γραμμικό υπόχωρο W_1 του X ο οποίος περιέχει τον W, έχουμε βρεί $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ ώστε $f_1|_W = f$ και $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.*

Έστω $y \in X \setminus W_1$, και $W_2 = \mathrm{span}\{W_1, y\}$. Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ ώστε $f_2|_{W_1} = f_1$ και $f_2(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_2$.

Απόδειξη. Κάθε $z \in W_2$ γράφεται *μονοσήμαντα* στη μορφή

$$z = x + \lambda y$$

για κάποια $x \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Η γραμμική επέκταση f_2 που ζητάμε προσδιορίζεται λοιπόν μονοσήμαντα από την τιμή $a \in \mathbb{R}$ που θα επιλέξουμε σαν $f_2(y)$. Αν θέσουμε $f_2(y) = a$, τότε πρέπει να έχουμε

$$f_2(z) = f_2(x) + \lambda f_2(y) = f_1(x) + \lambda a, \tag{1}$$

αφού ζητάμε το f_2 να είναι γραμμικό και να επεκτείνει το f_1. Η άλλη ιδιότητα που ζητάμε από το a είναι η εξής: Για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y). \tag{2}$$

Ισοδύναμα, παίρνοντας υπ' όψιν τις (1) και (2), ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y) \quad , \quad f_1(x) - \lambda a \leq p(x - \lambda y). \tag{3}$$

Επειδή το p είναι θετικά ομογενές και το f_1 γραμμικό στον W_1, η (3) είναι ισοδύναμη με το εξής: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) \quad , \quad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) - a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right), \tag{4}$$

και επειδή ο W_1 είναι υπόχωρος, ισοδύναμα ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x') - p(x' - y) \leq a \leq p(x + y) - f_1(x).$$

Μιά τέτοια επιλογή του a είναι δυνατή αν και μόνο αν για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x) + f_1(x') \leq p(x' - y) + p(x + y).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_1(x') &= f_1(x+x') \\ &\leq p(x+x') \\ &= p((x'-y)+(x+y)) \\ &\leq p(x'-y)+p(x+y), \end{aligned}$$

από την υπογραμμικότητα του p, την γραμμικότητα του f_1 στον W_1, την $f_1 \leq p$ στον W_1 και το γεγονός ότι το p ορίζεται σε ολόκληρο τον X. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Έστω $\mathcal{W}$ η οικογένεια όλων των ζευγαριών (W_1, f_1) που ικανοποιούν τα εξής:

(α) ο W_1 είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $W \subseteq W_1$.

(β) το $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό και $f_1|_W = f$.

(γ) $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.

Η $\mathcal{W}$ είναι μη κενή, αφού $(W, f) \in \mathcal{W}$. Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στην $\mathcal{W}$ θέτοντας $(W_1, f_1) \leq (W_2, f_2)$ αν και μόνο αν $W_1 \subseteq W_2$ και $f_2|_{W_1} = f_1$.

(1) Το $(\mathcal{W}, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn: Έστω $\mathcal{C} = \{(W_i, f_i) : i \in I\}$ μιά αλυσίδα στο $(\mathcal{W}, \leq)$. Ορίζουμε $W' = \bigcup_{i\in I} W_i$ και $f' : W' \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = f_i(x)$, $x \in W_i$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

(α) Ο W' είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $W \subseteq W_i \subseteq W'$ για κάθε $i \in I$ (θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $W_i \subseteq W_j$ είτε $W_j \subseteq W_i$, αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(β) Η f' ορίζεται καλά, είναι γραμμική, και $f'(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W'$ (κι εδώ θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $f_j|_{W_i} = f_i$ είτε $f_i|_{W_j} = f_j$ αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(γ) Για κάθε $i \in I$, $f'|_{W_i} = f_i$.

Έπεται ότι $(W', f') \in \mathcal{W}$, και το (W', f') είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

(2) Από το Λήμμα του Zorn, το $(\mathcal{W}, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο (W_0, f_0). Από το Λήμμα 2.3.2 βλέπουμε ότι $W_0 = X$: Αν όχι, θα παίρναμε $y \in X \setminus W_0$, και ορίζοντας $W_0' = \text{span}\{W_0, y\}$ θα επεκτείναμε το f_0 σε $f_0' : W_0' \to \mathbb{R}$, οπότε το (W_0', f_0') θα ήταν γνήσια μεγαλύτερο από το (W_0, f_0), άτοπο.

Η $\tilde{f} = f_0 : X \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη επέκταση της f στον X. $\square$

Ορισμός. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Η $p : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *ημινόρμα* αν

(α) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(β) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$.

Παρατηρήστε ότι κάθε ημινόρμα ικανοποιεί τα εξής:

(γ) $p(0) = 0$ και $p(-x) = p(x)$ για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

(δ) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(ε) Το σύνολο $\{x \in X : p(x) = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Το Θεώρημα επέκτασης του Hahn παίρνει την εξής μορφή αν το p είναι ημινόρμα.

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και έστω $p : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμα. Υποθέτουμε ότι W είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του X, $f : W \to \mathbb{K}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές, και $|f(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in W$. Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $|f(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Θεωρούμε την επέκταση $\tilde{f}$ που μάς εξασφαλίζει το Θεώρημα 2.3.1. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, και από την γραμμικότητα του $\tilde{f}$ και την $p(-x) = p(x)$ βλέπουμε ότι

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

Άρα, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$. □

Για την απόδειξη στη μιγαδική περίπτωση, θα χρειαστούμε κάποιες απλές παρατηρήσεις. Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ και $f : X \to \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές, τότε μπορούμε να γράφουμε το f στη μορφή $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$, όπου $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : X \to \mathbb{R}$ είναι προσθετικά και $\mathbb{R}$-ομογενή συναρτησοειδή (δηλαδή, αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $\mathrm{Re}f(ax) = a\mathrm{Re}f(x)$). Επίσης, το f προσδιορίζεται πλήρως από το $\mathrm{Re}f$. Πράγματι, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$f(ix) = \mathrm{Re}f(ix) + i\mathrm{Im}f(ix)$$

και

$$f(ix) = if(x) = -\mathrm{Im}f(x) + i\mathrm{Re}f(x),$$

άρα

$$f(x) = \mathrm{Re}f(x) + i\mathrm{Im}f(x) = \mathrm{Re}f(x) - i\mathrm{Re}f(ix).$$

Αντίστροφα, αν $h : X \to \mathbb{R}$ είναι ένα προσθετικό και $\mathbb{R}$-ομογενές συναρτησοειδές, τότε το $g : X \to \mathbb{C}$ με $g(x) = h(x) - ih(ix)$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $\mathrm{Re}g = h$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.3 *στην περίπτωση* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Θέτουμε $h = \mathrm{Re}f$. Τότε, το $h : W \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές αν δούμε τον X σαν γραμμικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$, και

$$|h(x)| = |\mathrm{Re}f(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$$

για κάθε $x \in W$. Από την πραγματική περίπτωση του Θεωρήματος, υπάρχει $\tilde{h} : X \to \mathbb{R}$ προσθετικό και $\mathbb{R}$-ομογενές, με την ιδιότητα $\tilde{h}|_W = h$ και

$$|\tilde{h}(x)| \leq p(x)$$

για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ με $\tilde{f}(x) = \tilde{h}(x) - i\tilde{h}(ix)$. Τότε, το $\tilde{f}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές και εύκολα ελέγχουμε ότι $\tilde{f}|_W = f$ (γιατί $\mathrm{Re}(\tilde{f}) = \tilde{h}$ και $\tilde{h}|_W = h = \mathrm{Re}f$).

Μένει να δείξουμε ότι $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$. Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{f}(x) = Re^{i\theta}$. Από τη γραμμικότητα του $\tilde{f}$ έχουμε $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = R \in \mathbb{R}$, άρα $\tilde{h}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}(e^{-i\theta}x)$. Τότε,

$$|\tilde{f}(x)| = R = |\tilde{h}(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x),$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα έχουμε την εξής «αναλυτική μορφή» του Θεωρήματος Hahn-Banach.

Θεώρημα 2.3.4 (Banach). *Έστω X χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Δηλαδή, υπάρχει συνεχής επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.*

Απόδειξη. Έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|$ για κάθε $x \in Y$. Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}$ με $p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$. Το p είναι ημινόρμα:
(α) Για την υποπροσθετικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_{Y^*}\|x+y\| \leq \|f\|_{Y^*}(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\|_{Y^*}\|x\| + \|f\|_{Y^*}\|y\| \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

(β) Το p είναι ομογενές: αν $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε

$$p(\lambda x) = \|f\|_{Y^*}\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|f\|_{Y^*}\|x\| = |\lambda|\, p(x).$$

Από το Θεώρημα 2.3.3, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ της f, ώστε

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$$

για κάθε $x \in X$. Άρα, $\tilde{f} \in X^*$ και $\|\tilde{f}\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αφού $\tilde{f}|_Y = f$, παίρνουμε

$$\|\tilde{f}\|_{X^*} = \sup_{x \in S_X} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x \in S_Y} |f(x)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Δηλαδή, $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. □

Η αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach μας επιτρέπει να δείχνουμε την ύπαρξη φραγμένων συναρτησοειδών με συγκεκριμένες ιδιότητες. Ειδικότερα, δείχνει ότι ο δυϊκός χώρος ενός μη τετριμμένου χώρου με νόρμα περιέχει πολλά συναρτησοειδή. Χαρακτηριστικά αποτελέσματα αυτού του είδους είναι τα εξής.

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $X \neq \{0\}$ χώρος με νόρμα, και $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \mathrm{span}\{x_0\}$ που παράγεται από το x_0 και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$. Το f είναι γραμμικό, και

$$\|f\|_{W^*} = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Από το Θεώρημα 2.3.4, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{W^*} = 1$ και

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|. \quad \square$$

Πόρισμα 2.3.6. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $x \in X$. Τότε,*

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.5, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$, $\|\tilde{f}\| = 1$ με $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geq |\tilde{f}(x)| = \|x\|. \tag{1}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\| = 1$ τότε $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = \|x\|$. Άρα,

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2), $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$. Το sup είναι max λόγω του $\tilde{f}$. $\square$

Παρατήρηση. Γνωρίζουμε ήδη ότι $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ για κάθε $f \in X^*$ (αυτό ήταν συνέπεια του *ορισμού* της νόρμας τελεστή.) Το Θεώρημα Hahn-Banach, στη μορφή του Πορίσματος 2.3.6, μας δίνει τη δυϊκή σχέση $\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|$. Δηλαδή, η νόρμα του x «πιάνεται» σαν τιμή κάποιου f από τη μοναδιαία σφαίρα του δυϊκού χώρου.

Πόρισμα 2.3.7. *Αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in X^*$, τότε $x = y$.*

Απόδειξη. Έχουμε $\|x - y\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x - y)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x) - f(y)| = 0$, άρα $x = y$. $\square$

Σημείωση. Το Πόρισμα 2.3.7 δείχνει ότι ο X^* *διαχωρίζει* τα σημεία του X: αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι ο X^* *διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους*:

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν*

$$\delta = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\},$$

τότε υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1/\delta$, $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\tilde{f}(x_0) = 1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Y$. Παρατηρούμε ότι

$$\|[x_0]\|_0 = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} = d(x_0, Y) = \delta.$$

Από το Θεώρημα 2.3.5 υπάρχει $g \in (X/Y)^*$ με $\|g\| = 1$ και $g([x_0]) = \delta$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{K}$ με

$$f(x) = \frac{1}{\delta}(g \circ Q)(x).$$

Το f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $f(y) = g([0])/\delta = 0$ αν $y \in Y$. Από τον ορισμό του g,

$$f(x_0) = \frac{g([x_0])}{\delta} = 1.$$

Επίσης,

$$|f(x)| = \frac{1}{\delta}|g(Q(x))| \leq \frac{\|g\| \cdot \|Q\| \cdot \|x\|}{\delta} \leq \frac{\|x\|}{\delta},$$

άρα $\|f\| \leq 1/\delta$. Μένει να δείξουμε ότι $\|f\| \geq 1/\delta$. Παρατηρούμε ότι $f(x_0 - y) = f(x_0) = 1$ για κάθε $y \in Y$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \sup_{y\in Y} \frac{|f(x_0 - y)|}{\|x_0 - y\|} = \frac{1}{\inf_{y\in Y} \|x_0 - y\|} \\ &= \frac{1}{\|[x_0]\|_0} = \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.8.

Θεώρημα 2.3.9. *Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Θα μάς χρειαστεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 2.3.10. *Η $S_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμη ως προς την επαγόμενη μετρική.*

Απόδειξη. Υπάρχει M αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Ορίζουμε

$$M_1 = \{g = f/\|f\| : f \in M\backslash\{0\}\}.$$

Το M_1 είναι αριθμήσιμο υποσύνολο της S_{X^*}, και θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Έστω $f \in S_{X^*}$. Υπάρχει ακολουθία $\{h_k\}$ στο M με $h_k \to f$. Άρα, $\|h_k\| \to \|f\| = 1$, δηλαδή, τελικά $h_k \neq 0$. Οι $l_k = h_k/\|h_k\|$ ανήκουν στο M_1, και

$$\begin{aligned} \|f - l_k\| &= \left\| f - \frac{h_k}{\|h_k\|} \right\| \\ &= \left\| f - h_k + h_k \left(1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right) \right\| \\ &\leq \|f - h_k\| + \|h_k\| \left| 1 - \frac{1}{\|h_k\|} \right| \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M_1} = S_{X^*}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος. Θεωρούμε $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_{X^*}. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|g_n\| = \sup_{\|x\|=1} |g_n(x)| = 1$, άρα υπάρχει $x_n \in X$, $\|x\| = 1$, ώστε

$$|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω ότι $\overline{Y} \neq X$. Τότε, από το Θεώρημα 2.3.8, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $\tilde{f}(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{f} - g_n\| \geq |(\tilde{f} - g_n)(x_n)| = |\tilde{f}(x_n) - g_n(x_n)| = |g_n(x_n)| > \frac{1}{2},$$

άτοπο, γιατί το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Άρα, $\overline{Y} = X$. Όμως, ο $\overline{Y}$ είναι διαχωρίσιμος: οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των x_n με ρητούς συντελεστές είναι πυκνοί στον $\overline{Y}$. Άρα, ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Ο χώρος $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$.

Έστω $0 < p < 1$. Με $L_p[0,1]$ συμβολίζουμε το γραμμικό χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας (ταυτίζουμε δύο συναρτήσεις αν είναι σχεδόν παντού ίσες) των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες

$$\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda < +\infty.$$

Αν $f, g \in L_p[0,1]$, ορίζουμε

$$d(f,g) = \int_{[0,1]} |f - g|^p d\lambda.$$

Η d είναι μετρική. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p, \quad a, b \geq 0, \quad 0 < p < 1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές και ότι οι πράξεις του γραμμικού χώρου είναι συνεχείς ως προς την d. Επίσης, μιμούμενοι την απόδειξη της πληρότητας του $L_p(\mu)$, $p \geq 1$, μπορείτε να δείξετε ότι ο $(L_p[0,1], d)$, $0 < p < 1$ είναι πλήρης. Θα εξετάσουμε την ύπαρξη συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $F : L_p[0,1] \to \mathbb{R}$.

Λήμμα 2.3.11. *Έστω $0 < p < 1$ και έστω G μη κενό, ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $L_p[0,1]$. Τότε, $G = L_p[0,1]$.*

Απόδειξη. Αφού η μετρική d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $0 \in G$. Αφού το G είναι ανοικτό και $0 \in G$, υπάρχει $R > 0$ με την ιδιότητα

$$\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda < R \Longrightarrow f \in G.$$

Έστω $g \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε διαμέριση $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ τέτοια ώστε

$$\int_{[x_i, x_{i+1}]} |g|^p d\lambda = \frac{1}{n} \int_{[0,1]} |g|^p d\lambda, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = ng\chi_{[x_i,x_{i+1}]}, \qquad i = 0,\dots,n-1.$$

Τότε, $g = (g_1 + \ldots + g_n)/n$ και

$$\int_{[0,1]} |g_i|^p d\lambda = n^p \int_{[x_i,x_{i+1}]} |g|^p d\lambda = \frac{1}{n^{1-p}} \int_{[0,1]} |g|^p d\lambda.$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο πετυχαίνουμε $g_i \in G$ για κάθε i: αρκεί να επιλέξουμε n για το οποίο

$$\int_{[0,1]} |g|^p d\lambda \leq n^{1-p} R.$$

Αφού το G είναι κυρτό, βλέπουμε ότι

$$g = \frac{g_1 + \ldots + g_n}{n} \in G,$$

και αφού η g ήταν τυχούσα, $G = L_p[0,1]$. □

Πρόταση 2.3.12. *Αν $0 < p < 1$ και $F : L_p[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, τότε $F \equiv 0$.*

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $G_\varepsilon = \{f \in L_p[0,1] : |F(f)| < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό, κυρτό και μη κενό γιατί $F(0) = 0$. Από το Λήμμα, $G_\varepsilon = L_p[0,1]$. Δηλαδή,

$$\forall f \in L_p[0,1] \;\; \forall \varepsilon > 0, \quad |F(f)| < \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι $F(f) = 0$ για κάθε $f \in L_p[0,1]$. Δηλαδή, $F \equiv 0$. □

Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με νόρμα, $x_1,\dots,x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1,\dots,m$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι

$$\overline{Y} = \bigcap \{\mathrm{Ker} f : f \in X^* \;,\; Y \subseteq \mathrm{Ker} f\}.$$

3. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα

$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και

$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in X.$$

[*Υπόδειξη:* Βρείτε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \to \mathbb{K}$ με $|\psi(x_1,x_2)| \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$ και $\psi(x,x) = f(x)$.]

4. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν ο $B(X,Y)$ είναι πλήρης και $X \neq \{0\}$, δείξτε ότι ο Y είναι πλήρης. [*Υπόδειξη:* Πάρτε $x_0 \in S_X$ και $f \in S_{X^*}$ με $|f(x_0)| = 1$. Τότε, για κάθε $y \in Y$ ο τελεστής $T : X \to Y$ με $T_y(x) = f(x)y$ είναι φραγμένος και $\|T_y\| = \|y\|$.]

5. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι $|\cdot|$ είναι μία άλλη νόρμα στον W που είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον W. Δείξτε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X που είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ στον X και ο περιορισμός της στον W είναι η $|\cdot|$.

6. Θεωρούμε τον χώρο $\ell_\infty(\mathbb{R})$ των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$,

$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n.$$

7. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Ο μηδενιστής του Y είναι το

$$N(Y) = \{f \in X^* : \ \forall y \in Y \ f(y) = 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/N(Y)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y^*. Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/N(Y) \to Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$.
(β) Δείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $N(Y)$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \to N(Y)$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \to X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.

8. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, δείξτε ότι $f \in X^*$.

2.4 Διαχωριστικά θεωρήματα

Ορισμός. Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι X είναι ένας χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και A, B είναι μη κενά υποσύνολα του X.

(α) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται*, αν υπάρχουν μη μηδενικό $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(a) \geq \lambda$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(β) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται γνήσια*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(a) > \lambda$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(γ) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται αυστηρά*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$ ώστε: $f(a) \geq \mu$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

Ο όρος «διαχωρίζονται» στο (α) δικαιολογείται από το γεγονός ότι το $\{x \in X : f(x) = \lambda\}$ είναι ένα κλειστό υπερεπίπεδο, το οποίο χωρίζει τον X σε δύο «ημιχώρους» εκ των οποίων ο ένας περιέχει το A και ο άλλος το B. Αναγκαία συνθήκη για τα (β), (γ) είναι η $A \cap B = \emptyset$.

Τα διαχωριστικά θεωρήματα που θα συζητήσουμε αφορούν κυρτά σύνολα, και η απόδειξή τους βασίζεται πολύ ουσιαστικά στο Θεώρημα Hahn-Banach. Γι' αυτό και αναφερόμαστε σ' αυτά με τον όρο «γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach».

Λήμμα 2.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $A \subseteq X$ ανοικτό και κυρτό με $0 \in A$. Ορίζουμε*

$$q_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Τότε, το q_A είναι ένα μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$(*) \qquad q_A(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X$$

και

$$(**) \qquad A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}.$$

Απόδειξη. Η q_A ορίζεται καλά: το A είναι ανοικτό και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $D(0,\delta) \subseteq A$. Έπεται ότι αν $0 \neq x \in X$, τότε $(\delta/2\|x\|)x \in A$, άρα $\frac{2}{\delta}\|x\| \in \{t > 0 : x \in tA\}$ και το σύνολο αυτό είναι κάτω φραγμένο από το 0, άρα έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Επίσης,

$$q_A(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει με $M = 2/\delta$ (αν $x = 0$, τότε $0 \in tA$ για κάθε $t > 0$, άρα $q_A(0) = 0$.)

Δείχνουμε τώρα τις δύο ιδιότητες του υπογραμμικού συναρτησοειδούς: Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} q_A(x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0 : x \in (t/\lambda)A\} \\ &= \lambda \inf\{(t/\lambda) : t > 0,\ x \in (t/\lambda)A\} = \lambda \inf\{s > 0 : x \in sA\} \\ &= \lambda q_A(x). \end{aligned}$$

Για την υποπροσθετικότητα, έστω $x, y \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $t, s > 0$ ώστε $t < q_A(x) + \varepsilon$, $s < q_A(y) + \varepsilon$, και $x \in tA$, $y \in sA$. Από την κυρτότητα του A έχουμε

$$tA + sA = (t+s)A,$$

άρα $x + y \in (t+s)A$. Έπεται ότι

$$q_A(x+y) \leq t + s < q_A(x) + q_A(y) + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$q_A(x+y) \leq q_A(x) + q_A(y).$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}$. Αν $q_A(x) < 1$, τότε υπάρχει r ώστε $q_A(x) < r < 1$ και $x \in rA \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $x \in A$, επειδή το A είναι ανοικτό υπάρχει $t > 0$ ώστε $x + tx \in A$, οπότε $q_A(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$. □

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω A μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του X που δεν περιέχει το 0. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ με την ιδιότητα $\tilde{f}(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή, το $\tilde{f}$ διαχωρίζει το A από το $\{0\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A$. Το $A' = x_0 - A$ είναι ανοικτό, κυρτό και περιέχει το 0. Σύμφωνα με το Λήμμα, υπάρχει θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές $q : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$q(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

και $q(x) < 1$ αν και μόνο αν $x \in A'$. Ειδικότερα, $q(x_0) \geq 1$ γιατί $x_0 \notin A'$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \text{span}\{x_0\}$ που παράγει το x_0, και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda q(x_0)$. Η f φράσσεται από το q: αν $\lambda \geq 0$, τότε $f(\lambda x_0) = q(\lambda x_0)$, ενώ αν $\lambda < 0$, τότε $f(\lambda x_0) < 0 \leq q(\lambda x_0)$.
Από το Θεώρημα 2.3.1, η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, το οποίο ικανοποιεί την $\tilde{f}(x) \leq q(x) \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επίσης,

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq q(-x) \leq M\| - x\| = M\|x\|,$$

άρα $|\tilde{f}(x)| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$, το οποίο αποδεικνύει ότι το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο ($\tilde{f} \in X^*$).

Τέλος, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x_0 - x \in A'$, άρα $q(x_0 - x) < 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\tilde{f}(x_0) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0 - x) \leq q(x_0 - x) < 1.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $q(x_0) \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall x \in A, \quad \tilde{f}(x) > \tilde{f}(x_0) - 1 = q(x_0) - 1 \geq 0. \quad \square$$

Θεώρημα 2.4.3. *Εστω X χώρος με νόρμα και έστω A, B ξένα κυρτά σύνολα, με το A ανοικτό. Τότε, υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) < \lambda$ αν $a \in A$, και $f(b) \geq \lambda$ αν $b \in B$. Αν το B είναι κι αυτό ανοικτό, τότε τα A, B διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη. Θέτουμε $G = A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το G είναι κυρτό, και αφού $G = \bigcup_{b \in B}(A - b)$, το G είναι ανοικτό. Από την $A \cap B \neq \emptyset$ έπεται ότι $0 \notin G$. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in G$.

Έστω $a \in A$, $b \in B$. Τότε, $a - b \in G$ άρα $f(a - b) > 0$. Δηλαδή, $f(a) > f(b)$. Υπάρχει λοιπόν $\lambda \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \sup\{f(b) : b \in B\} \leq \lambda \leq \inf\{f(a) : a \in A\}.$$

Το A έχει υποτεθεί ανοικτό και κυρτό, άρα το $f(A)$ είναι ένα ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Τότε, η $(*)$ δίνει $f(a) > \lambda$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

Αν το B είναι κι αυτό ανοικτό, τότε το $f(B)$ είναι επίσης ανοικτό διάστημα, άρα $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$, δηλαδή τα A, B διαχωρίζονται γνήσια. $\square$

Τέλος, δείχνουμε ένα διαχωριστικό θεώρημα για ξένα κλειστά και κυρτά υποσύνολα του X, αν ένα από αυτά είναι συμπαγές. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 2.4.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, K συμπαγές υποσύνολο του X, και A ανοικτό υποσύνολο του X με $K \subseteq A$. Τότε, υπάρχει $r > 0$ ώστε*

$$K + D(0, r) \subseteq A,$$

όπου $K + D(0, r) = \{x + y : x \in K, \|y\| < r\} = \{x \in X : d(x, K) < r\}$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \in A$ και το A είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r_x) = x + D(0, r_x) \subseteq A$.

Τότε,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} D(x, r_x/2),$$

και αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq D(x_1, r_{x_1}/2) \cup \ldots \cup D(x_m, r_{x_m}/2).$$

Θέτουμε $r = \min\{r_{x_1}/2, \ldots, r_{x_m}/2\}$. Τότε,

$$K + D(0, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + D(0, r_{x_i})) \subseteq A. \quad \square$$

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω A, B ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του X. Αν το B είναι συμπαγές, τότε τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά.*

Απόδειξη. Αφού τα A, B είναι ξένα, το συμπαγές B περιέχεται στο ανοικτό $X \backslash A$, και από το Λήμμα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B + D(0, r) \subseteq X \backslash A$, απ' όπου παίρνουμε

$$(B + D(0, r/2)) \cap (A + D(0, r/2)) = \emptyset.$$

Τα $A + D(0, r/2)$, $B + D(0, r/2)$ είναι ανοικτά και κυρτά: κυρτά γιατί τα A, B και $D(0, r/2)$ είναι κυρτά, και ανοικτά γιατί η $D(0, r/2)$ είναι ανοικτό σύνολο. Από το Θεώρημα 2.4.3 διαχωρίζονται γνήσια, άρα το ίδιο ισχύει και για τα υποσύνολά τους A, B. Υπάρχουν λοιπόν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(b) < \lambda < f(a)$$

για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Το B είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $b_0 \in B$ ώστε $f(b) \leq f(b_0)$ για κάθε $b \in B$. Αν $\mu = f(b_0) < \lambda$, τότε

$$B \subseteq \{x : f(x) \leq \mu\} \quad , \quad A \subseteq \{x : f(x) \geq \lambda\},$$

άρα τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά. $\square$

Παρατήρηση. Αν τα A, B υποτεθούν απλώς κλειστά, τότε το Θεώρημα 2.4.5 παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τα $A = \{(x, y) : y \leq 0\}$ και $B = \{(x, y) : x > 0, xy \geq 1\}$. Τα A, B είναι κλειστά, κυρτά και ξένα, αλλά δεν διαχωρίζονται γνήσια.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τον $L_2[-1, 1]$ (το μέτρο είναι το Lebesgue). Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$E_a = \{f \in C[-1, 1] : f(0) = a\}.$$

Δείξτε ότι κάθε E_a είναι κυρτό και πυκνό στον $L_2[-1, 1]$. Αν $a \neq b$, δείξτε ότι τα E_a και E_b δεν διαχωρίζονται από κανένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $F : L_2[-1, 1] \to \mathbb{R}$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και A, B μη κενά, ξένα, κυρτά υποσύνολα του X με την ιδότητα
$$0 \notin \overline{A - B}.$$
Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε
$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

2.5 Κλασικοί δυϊκοί χώροι

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε τους δυϊκούς χώρους ορισμένων κλασικών χώρων. Κάποιες από τις αποδείξεις δίνονται λεπτομερώς, οι υπόλοιπες αφήνονται για τις ασκήσεις.

Θεώρημα 2.5.1. *Ο δυϊκός χώρος του ℓ_p, $1 < p < \infty$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Για κάθε $y \in \ell_q$, η απεικόνιση $f_y : \ell_p \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) = \sum_n x_n y_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f_y\| \leq \|y\|_q$.

Ορίζουμε $T : \ell_q \to \ell_p^*$ με $T(y) = f_y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Για κάθε $y \in \ell_q$, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = |y_k|^{q-1}\mathrm{sign}(y_k)$, $k \leq N$. Τότε,
$$\|x(N)\|_p = \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{1/p}$$
και
$$f_y(x(N)) = \sum_{k=1}^N |y_k|^q,$$
οπότε
$$\|f_y\| \geq \frac{f_y(x(N))}{\|x(N)\|_p} = \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{1/q}$$
για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\|f_y\| \geq \|y\|_q$, άρα
$$\|T(y)\|_{\ell_p^*} = \|f_y\| = \|y\|_q.$$
Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f \in \ell_p^*$. Θέτουμε $y = (y_n)$ όπου $y_n = f(e_n)$. Θα δείξουμε ότι $y \in \ell_q$ και ότι $f_y = f$ (οπότε $T(y) = f$).

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = |y_k|^{q-1}\mathrm{sign}(y_k)$, $k \leq N$. Τότε,
$$f(x(N)) = \sum_{k=1}^N |y_k|^{q-1}\mathrm{sign}(y_k) f(e_k) = \sum_{k=1}^N |y_k|^q$$
και
$$\|x(N)\|_p = \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{1/p}$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q = |f(x(N))| \leq \|f\| \cdot \|x(N)\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q \right)^{1/p},$$

δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q \leq \|f\|^q$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $y \in \ell_q$ και $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Για να δείξουμε ότι $f_y = f$, παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά φραγμένα συναρτησοειδή συμφωνούν σε κάθε e_n από τον ορισμό του y. Λόγω γραμμικότητας συμφωνούν στον $\text{span}\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ ο οποίος είναι πυκνός στον ℓ_p και λόγω συνέχειας συμφωνούν σε ολόκληρο τον ℓ_p. □

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$ και $1 < p < \infty$. Ο δυϊκός χώρος του $L_p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L_q(\mu)$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη. Για κάθε $g \in L_q(\mu)$, η απεικόνιση $\phi_g : L_p(\mu) \to \mathbb{K}$ με

$$\phi_g(f) = \int_\Omega f g d\mu$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|\phi_g\| \leq \|g\|_q$. Ορίζουμε $T : L_q(\mu) \to (L_p(\mu))^*$ με $T(g) = \phi_g$.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι ισομετρία. Έστω $g \in L_q(\mu)$, $g \neq 0$. Ορίζουμε f με $f(\omega) = |g(\omega)|^{q-1}\text{sign}(g(\omega))$. Τότε, $f \in L_p(\mu)$ και

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega |g|^q d\mu.$$

Επομένως,

$$\|T(g)\| = \|\phi_g\| \geq \frac{|\phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $\phi : L_p(\mu) \to \mathbb{K}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ με

$$\nu(A) = \phi(\chi_A).$$

Η ν ορίζεται καλά γιατί $\chi_A \in L_p(\mu)$ (αφού $\mu(\Omega) < \infty$). Επίσης, η ν είναι μέτρο: από την γραμμικότητα του ϕ έπεται ότι η ν είναι πεπερασμένα προσθετική, και αν (A_n) είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ με $\bigcap_n A_n = \emptyset$, τότε

$$|\nu(A_n)| \leq \|\phi\| \cdot \|\chi_{A_n}\|_p = \|\phi\| \left(\mu(A_n)\right)^{1/p} \to 0.$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$, δηλαδή το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει μ-μετρήσιμη συνάρτηση g ώστε

$$\phi(\chi_A) = \nu(A) = \int_A g d\mu = \int_\Omega \chi_A g d\mu.$$

Έπεται ότι
$$\phi(f) = \int_\Omega fg d\mu$$
για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση f. Θα δείξουμε ότι $g \in L_q(\mu)$. Θεωρούμε μια ακολουθία από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις h_k με $0 \leq h_k \nearrow |g|^q$ και θέτουμε $g_k = h_k^{1/p}\mathrm{sign}(g)$. Τότε, $\|g_k\|_p^p = \|h_k\|_1$ και
$$\left|\int_\Omega g_k g\right| = |\phi(g_k)| \leq \|\phi\| \cdot \|g_k\|_p,$$
άρα
$$\left|\int_\Omega g_k g d\mu\right| \leq \|\phi\| \cdot \|h_k\|_1^{1/p}.$$
Από την άλλη πλευρά, $g_k g = h_k^{1/p}|g| \geq h_k^{1/p}h_k^{1/q} = h_k$. Άρα,
$$\|h_k\|_1 \leq \left|\int_\Omega g_k g d\mu\right| \leq \|\phi\| \cdot \|h_k\|_1^{1/p},$$
το οποίο δίνει $\|h_k\|_1 \leq \|\phi\|^q$. Παίρνοντας $k \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, βλέπουμε ότι
$$\int_\Omega |g|^q d\mu = \lim_k \int_\Omega h_k d\mu \leq \|\phi\|^q.$$
Αυτό δείχνει ότι $g \in L_q(\mu)$. Τώρα, τα ϕ_g και ϕ συμφωνούν στις απλές συναρτήσεις οι οποίες είναι πυκνές στον $L_p(\mu)$. Λόγω συνέχειας, $T(g) = \phi_g \equiv \phi$, δηλαδή ο T είναι ισομετρία επί. □

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.2 χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα Radon–Nikodym. Δίνουμε μια απόδειξη που χρησιμοποιεί την θεωρία των χώρων Hilbert (το επιχείρημα είναι του von Neumann).

Θεώρημα 2.5.3 (Radon–Nikodym). *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{A})$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ. Τότε, υπάρχει μοναδική $h \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που το μ είναι πεπερασμένο και το ν είναι μη αρνητικό (από αυτή την ειδική περίπτωση παίρνουμε το γενικό συμπέρασμα με βασικά επιχειρήματα της θεωρίας μέτρου).

Θεωρούμε το μέτρο $\lambda = \mu + \nu$ στον $(\Omega, \mathcal{A})$. Από τις υποθέσεις μας, το λ είναι μη αρνητικό, πεπερασμένο μέτρο. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ και ορίζουμε $\phi : L_2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda) \to \mathbb{R}$ με
$$\phi(f) = \int_\Omega f\, d\nu.$$
Το ϕ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ και
$$|\phi(f)| \leq \int_\Omega |f|\, d\lambda \leq \sqrt{\lambda(\Omega)} \left(\int_\Omega f^2 d\lambda\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda(\Omega)}\, \|f\|_2,$$

δηλαδή το ϕ είναι φραγμένο. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $g \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ με την ιδιότητα

$$\phi(g) = \int_\Omega fg \, d\lambda,$$

δηλαδή,

$$\int_\Omega f \, d\nu = \int_\Omega fg \, d\lambda$$

για κάθε $f \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$.

Δείχνουμε πρώτα ότι $0 \le g \le 1$ σχεδόν παντού ως προς λ. Πράγματι, αν $A_n = \{\omega \in \Omega : g(\omega) \geq 1 + 1/n\}$ τότε, θεωρώντας την $f = \chi_{A_n}$ βλέπουμε ότι

$$\lambda(A_n) \geq \nu(A_n) \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda(A_n),$$

άρα $\lambda(A_n) = 0$. Αφού $A := \{\omega : g(\omega) > 1\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, έπεται ότι $\lambda(A) = 0$. Με ανάλογο τρόπο, αν $B_n = \{\omega \in \Omega : g(\omega) \leq -1/n\}$ τότε, θεωρώντας την $f = \chi_{B_n}$ βλέπουμε ότι

$$0 \leq \nu(B_n) \leq -\frac{1}{n}\lambda(B_n),$$

άρα $\lambda(B_n) = 0$. Αφού $B := \{\omega : g(\omega) < 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, έπεται ότι $\lambda(B) = 0$.

Από την $\lambda = \mu + \nu$ μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$(*) \qquad \int_\Omega f(1-g) \, d\nu = \int_\Omega fg \, d\mu$$

για κάθε $f \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι g και $1-g$ είναι μη αρνητικές *παντού* στο Ω. Θέτοντας $C = \{\omega : g(\omega) = 1\}$ και θεωρώντας την $f = \chi_C$, βλέπουμε ότι $\mu(C) = 0$. Αφού το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ, έπεται ότι $\nu(C) = 0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $0 \leq g < 1$ *παντού* στο Ω.

Έστω $A \in \mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $f_n = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_A$ και από την $(*)$ έχουμε

$$\int_A (1 - g^{n+1}) \, d\nu = \int_A g \frac{1 - g^{n+1}}{1-g} \, d\mu.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu.$$

Το $A \in \mathcal{A}$ ήταν τυχόν, οπότε θέτοντας $h = \frac{g}{1-g}$ έχουμε το ζητούμενο (ελέγξτε την ολοκληρωσιμότητα και τη μοναδικότητα της h). $\square$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

2. Δείξτε ότι ο ℓ_1^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_∞.

3. Θεωρούμε τον χώρο c των συγκλινουσών ακολουθιών με νόρμα την $\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την απεικόνιση $T : c \to c_0$ που ορίζεται ως εξής: αν $x = (a_n)$ με $a_n \to a$, τότε $T(x) = (a, a_1 - a, a_2 - a, \dots)$.]

(β) Δείξτε ότι οι c και c_0 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $S : c_0 \to c$ είναι ισομετρία επί, παρατηρήστε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $S(e_n) \notin c_0$.]

(γ) Δείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

2.6 Δεύτερος δυϊκός και αυτοπάθεια

Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Έχουμε δεί ότι ο X^* είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για τον $(X^*)^*$, τον χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X^* \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |F(f)|.$$

Για ευκολία γράφουμε $X^{**} := (X^*)^*$. Ο X^{**} λέγεται *δεύτερος δυϊκός* του X.

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τον τρίτο δυϊκό X^{***} του X και ούτω καθεξής. Στη συνέχεια, αν X είναι ένας χώρος με νόρμα θα γράφουμε $x_1, x_2, \dots$ για τα στοιχεία του X, $x_1^*, x_2^*, \dots$ για τα στοιχεία του X^*, $x_1^{**}, x_2^{**}, \dots$ για τα στοιχεία του X^{**} κλπ.

Κάθε $x \in X$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο ένα στοιχείο $\tau(x)$ του X^{**} ως εξής: ορίζουμε $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$, με

$$[\tau(x)](x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*.$$

Λήμμα 2.6.1. *Το $\tau(x) : X^* \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα τη γραμμικότητα του $\tau(x)$: Αν $x_1^*, x_2^* \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, τότε

$$\begin{aligned} [\tau(x)](\lambda x_1^* + \mu x_2^*) &= (\lambda x_1^* + \mu x_2^*)(x) = \lambda x_1^*(x) + \mu x_2^*(x) \\ &= \lambda[\tau(x)](x_1^*) + \mu[\tau(x)](x_2^*). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$|[\tau(x)](x^*)| = |x^*(x)| \le \|x^*\| \, \|x\| = \|x\| \, \|x^*\|, \quad x^* \in X^*.$$

Άρα, $\tau(x) \in X^{**}$ και $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$. $\square$

Λήμμα 2.6.2. *Η απεικόνιση $\tau : X \to X^{**}$ με $x \mapsto \tau(x)$ είναι γραμμική ισομετρία. Ειδικότερα, η τ είναι ένα προς ένα.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned}[\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](x^*) &= x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 x^*(x_1) + \lambda_2 x^*(x_2) \\ &= \lambda_1[\tau(x_1)](x^*) + \lambda_2[\tau(x_2)](x^*) \\ &= [\lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)](x^*).\end{aligned}$$

Άρα, $\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)$, δηλαδή η τ είναι γραμμική.

(β) Έστω $x \in X$. Από εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ ώστε $\|x_0^*\| = 1$ και $x_0^*(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|=1} |[\tau(x)](x^*)| \geq |[\tau(x)](x_0^*)| = |x_0^*(x)| = \|x\|.$$

Δηλαδή, $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \geq \|x\|$. Στο προηγούμενο Λήμμα είδαμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Επομένως,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \|x\|,$$

και η τ είναι ισομετρία.

(γ) Προφανώς, $\tau(x) = 0 \Longrightarrow \|\tau(x)\|_{X^{**}} = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Επειδή η τ είναι γραμμική, αυτό δείχνει ότι η τ είναι ένα προς ένα. $\square$

Άμεση συνέπεια των δύο λημμάτων είναι το εξής:

Θεώρημα 2.6.3. *Κάθε χώρος X με νόρμα εμφυτεύεται με φυσιολογικό τρόπο ισομετρικά στον X^{**} μέσω της $\tau : X \to X^{**}$ που ορίζεται από την*

$$[\tau(x)](x^*) = x^*(x). \quad \square$$

Παρατηρήσεις. (α) Ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο $\tau(x)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}. Πράγματι, ο X^{**} είναι πλήρης και ο $\tau(X)$ γραμμικός υπόχωρος του X^{**}. Ο $\tau(X)$ είναι κλειστός αν και μόνο αν είναι πλήρης, όμως ο $\tau(X)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο X είναι πλήρης.

(β) **Ορισμός** Η απεικόνιση τ λέγεται *κανονική εμφύτευση* του X στον X^{**}. Ο X λέγεται *αυτοπαθής* αν $\tau(X) = X^{**}$, δηλαδή αν η τ είναι επί. Τότε, ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}.

(γ) Η ιδιότητα της αυτοπάθειας *δεν* είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ισομετρικού ισομορφισμού ανάμεσα στους X και X^{**}. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε *είναι* ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, αλλά με πολύ ισχυρό τρόπο: η κανονική εμφύτευση τ είναι ισομετρία επί από τον X στον X^{**}. Ο James (1951) έχει δώσει παράδειγμα χώρου που είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δεύτερο δυϊκό του, χωρίς να είναι αυτοπαθής.

(δ) Υπάρχουν πολλοί μη αυτοπαθείς χώροι. Πρώτα-πρώτα, ένας χώρος με νόρμα που δεν είναι πλήρης δεν μπορεί να είναι αυτοπαθής. Όλοι οι χώροι με νόρμα που έχουν άπειρη αριθμήσιμη διάσταση σαν γραμμικοί χώροι, ανήκουν σε αυτή την κατηγορία: υποθέτοντας ότι ο χώρος με νόρμα $X = \text{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι πλήρης βλέπουμε ότι, από το θεώρημα του Baire, πρέπει να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε ο $F_n = \mathrm{span}\{x_1, \dots x_n\}$ να έχει μη κενό εσωτερικό (άσκηση: χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι κάθε υπόχωρος F_n είναι κλειστός, αφού έχει πεπερασμένη διάσταση). Όμως τότε, $X = F_n$ (άσκηση) και αυτό είναι άτοπο αφού ο X είναι απειροδιάστατος.

Ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής, γιατί $c_0^* \simeq \ell_1$ και $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$. Αν ο c_0 ήταν αυτοπαθής, τότε οι c_0 και ℓ_∞ θα ήταν ισομετρικά ισόμορφοι. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού ο c_0 είναι διαχωρίσιμος ενώ ο ℓ_∞ όχι.

Ο ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, θα ήταν ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_∞^*, δηλαδή ο ℓ_∞^* θα ήταν διαχωρίσιμος. Όμως αυτό θα σήμαινε ότι και ο ℓ_∞ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο.

Πρόταση 2.6.4. *Ο $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Έχουμε δεί ότι η απεικόνιση $T : L_q(\mu) \to (L_p(\mu))^*$ που ορίζεται από την

$$[Tg](f) = \int_\Omega fg \, d\mu, \qquad f \in L_p(\mu)$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Όμοια, η απεικόνιση $S : L_p(\mu) \to (L_q(\mu))^*$ που ορίζεται από την

$$[Sf](g) = \int_\Omega fg \, d\mu, \qquad g \in L_q(\mu)$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\tau : L_p(\mu) \to (L_p(\mu))^{**}$ είναι επί. Έστω λοιπόν $x^{**} \in (L_p(\mu))^{**}$. Δηλαδή, η $x^{**} : (L_p(\mu))^* \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Τότε, η $x^{**} \circ T : L_q(\mu) \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L_q(\mu)$, άρα υπάρχει $f \in L_p(\mu)$ ώστε

$$x^{**} \circ T = Sf.$$

Θα δείξουμε ότι $\tau(f) = x^{**}$ ελέγχοντας ότι συμφωνούν σε κάθε $x^* \in (L_p(\mu))^*$. Έστω $x^* \in (L_p(\mu))^*$. Υπάρχει $g \in L_q(\mu)$ ώστε $x^* = Tg$. Τότε,

$$x^{**}(x^*) = x^{**}(Tg) = (x^{**} \circ T)(g) = [Sf](g) = \int_\Omega fg \, d\mu$$

και

$$[\tau(f)](x^*) = x^*(f) = [Tg](f) = \int_\Omega fg \, d\mu.$$

Άρα $x^{**}(x^*) = [\tau(f)](x^*)$.

Αυτό αποδεικνύει ότι η τ είναι επί, άρα ο $L_p(\mu)$ είναι αυτοπαθής. □

Με τελείως ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται το εξής.

Πρόταση 2.6.5. *Ο ℓ_p, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.* □

Δείχνουμε τώρα ένα ακόμα αποτέλεσμα ενδεικτικό για τον τρόπο με τον οποίο η κανονική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$ μπορεί να μάς δώσει πληροφορίες για τον X.

Πρόταση 2.6.6. *Έστω X χώρος Banach. Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω $\tau : X \to X^{**}$ και $\tau_1 : X^* \to X^{***}$ οι κανονικές εμφυτεύσεις.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\tau(X) = X^{**}$. Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$. Ζητάμε $x_0^* \in X^*$ ώστε $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Ορίζουμε το x_0^* ως εξής: αν $x \in X$ τότε $\tau(x) \in X^{**}$, οπότε θέτουμε

$$x_0^*(x) := (x_0^{***})(\tau(x)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το x_0^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και αφού

$$|x_0^*(x)| = |(x_0^{***})(\tau(x))| \leq \|x_0^{***}\| \cdot \|\tau(x)\| = \|x_0^{***}\| \cdot \|x\|,$$

βλέπουμε ότι $x_0^* \in X^*$ και $\|x_0^*\| \leq \|x_0^{***}\|$.

Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Άρα,

$$\begin{aligned} [\tau_1(x_0^*)](x^{**}) &= x^{**}(x_0^*) = [\tau(x)](x_0^*) \\ &= x_0^*(x) = x_0^{***}(\tau(x)) \\ &= x_0^{***}(x^{**}). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\tau_1(X^*) = X^{***}$ και ας υποθέσουμε ότι $\tau(X) \neq X^{**}$. Τότε, ο $\tau(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X^{**} άρα υπάρχει μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x_0^{***} \in X^{***}$ ώστε $x_0^{***}(\tau(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_0^*(x) = [\tau(x)](x_0^*) = [\tau_1(x_0^*)](\tau(x)) = x_0^{***}(\tau(x)) = 0,$$

δηλαδή $x_0^* = 0$. Όμως τότε, $x_0^{***} = \tau_1(x_0^*) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Κεφάλαιο 3

Βασικά θεωρήματα για τελεστές σε χώρους Banach

3.1 Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος

Πρόγονος της αρχής ομοιόμορφου φράγματος μπορεί να θεωρηθεί το εξής θεώρημα του Osgood: αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την ιδιότητα η $\{f_n(t)\}$ να είναι φραγμένη για κάθε $t \in [0,1]$, τότε υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$ στο οποίο η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Με το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα αποδεικνύεται η εξής γενικότερη πρόταση.

Πρόταση 3.1.1. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in D(x_0, r)$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{x \in X : \forall f \in \mathcal{F},\ |f(x)| \leq m\}.$$

(i) Κάθε A_m είναι κλειστό: αν $x_k \in A_m$ και $x_k \to x$, τότε

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \ |f(x_k)| \leq m$$

και, από τη συνέχεια των $f \in \mathcal{F}$ παίρνουμε $f(x_k) \to f(x)$ καθώς $k \to \infty$, άρα

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \ |f(x)| \leq m,$$

δηλαδή $x \in A_m$.
(ii) $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, το $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ ώστε, για κάθε $f \in \mathcal{F}$, $|f(x)| \leq M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geq M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

(iii) Ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το Θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $D(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $D(x_0, r)$:

$$\forall x \in D(x_0, r)\ \forall f \in \mathcal{F}, \ \ |f(x)| \leq m_0. \quad \Box$$

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια οικογένεια τελεστών $\mathcal{F}$ στον $B(X, Y)$ που έχουν την ιδιότητα το $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ να είναι φραγμένο στον Y για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των $T \in \mathcal{F}$ και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 3.1.1 μας δίνουν ότι οι νόρμες $\|T\|$, $T \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες:

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\forall\, T \in \mathcal{F}, \quad \|T\| \leq M.$$

Απόδειξη. Για κάθε $T \in \mathcal{F}$ ορίζουμε $f_T : X \to \mathbb{R}$ με $f_T(x) = \|T(x)\|$. Κάθε f_T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Αν $x, y \in X$, τότε

$$|f_T(x) - f_T(y)| = |\ \|T(x)\| - \|T(y)\|\ | \leq \|T(x) - T(y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|.$$

Από την υπόθεσή μας για την $\mathcal{F}$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$\sup\{|f_T(x)| : T \in \mathcal{F}\} = \sup\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty$$

δηλαδή το σύνολο $\{f_T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο.

Από την Πρόταση 3.1.1 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $T \in \mathcal{F}$,

$$|f_T(x)| = \|T(x)\| \leq M_1.$$

Έστω $x \in B_X$. Τότε, για κάθε $T \in \mathcal{F}$ έχουμε $\|T(x_0 + rx)\| \leq M_1$ και $\|T(x_0)\| \leq M_1$ (γιατί $x_0, x_0 + rx \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $T \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \frac{1}{r}\|T(rx)\| = \frac{1}{r}\|T(x_0 + rx) - T(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r}\left(\|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\|\right) \leq \frac{2M_1}{r}. \end{aligned}$$

Αφού το $x \in B_X$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|T\| \leq M := 2M_1/r$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$. $\Box$

Σημείωση. Η υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach είναι απαραίτητη όπως δείχνει το εξής παράδειγμα: Θεωρούμε το χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών πραγματικών ακολουθιών, με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |a_k|$ (όπου $x = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$). Ορίζουμε μια ακολουθία συναρτησοειδών $f_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Κάθε f_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές και

$$|f_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq n \sup_k |a_k| = n\,\|x\|_\infty,$$

δηλαδή $\|f_n\| \leq n$. Ισχύει μάλιστα ισότητα: πάρτε το $x^{(n)} = (1,\ldots,1,0,\ldots)$ με n μονάδες. Τότε, $\|x^{(n)}\| = 1$ και $f_n(x^{(n)}) = n$.

Για κάθε $x \in c_{00}$, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι τελικά σταθερή. Επομένως, το $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο. Όμως οι νόρμες των f_n δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες: $\|f_n\| = n \to \infty$. Το πρόβλημα είναι βέβαια ότι ο X δεν είναι πλήρης.
□

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος εφαρμόζεται συχνά στην εξής μορφή (θεώρημα Banach-Steinhaus):

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και έστω (T_n) ακολουθία φραγμένων τελεστών $T_n : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ υπάρχει το $y_x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \in Y$. Τότε, αν ορίσουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = y_x$, ο T είναι φραγμένος τελεστής και*

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Από την υπόθεση, για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο. Από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T_n\| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|T(x)\| = \|\lim_n T_n(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \liminf_n \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|.$$

Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq M$. Για την ακρίβεια, η απόδειξη δείχνει ότι $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$. □

Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της «αρχής ομοιόμορφου φράγματος» για οικογένειες φραγμένων τελεστών. Στην Πρόταση που ακολουθεί, δεν υποθέτουμε την πληρότητα του πεδίου ορισμού αλλά περιορίζουμε τους τελεστές σε ένα «μικρό» σύνολο.

Πρόταση 3.1.4. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X, και $\mathcal{F}$ οικογένεια φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in K$ το σύνολο $\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχει $a > 0$ ώστε*

$$T(K) \subseteq aB_Y$$

για κάθε $T \in \mathcal{F}$. Δηλαδή, οι εικόνες $T(K)$, $T \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

Απόδειξη. Ορίζουμε $A_n = \{x \in X : \ \forall T \in \mathcal{F} \ \|T(x)\| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε A_n είναι κλειστό σύνολο και από την υπόθεσή μας,

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap A_n).$$

Αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχει m ώστε το $K \cap A_m$ να έχει μη κενό εσωτερικό στο K. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $x_0 \in K$ και $r > 0$ ώστε

$$(*) \qquad K \cap (x_0 + rB_X) \subseteq A_m.$$

Επίσης, λόγω της συμπάγειας του K μπορούμε να βρούμε $M > 1$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$K \subseteq x_0 + MrB_X.$$

Έστω $T \in \mathcal{F}$ και $x \in K$. Θεωρούμε το

$$z = \left(1 - \frac{1}{M}\right) x_0 + \frac{1}{M} x.$$

Το K είναι κυρτό, άρα $z \in K$. Επίσης, $z - x_0 = (x - x_0)/M \in rB_X$, δηλαδή $z \in x_0 + rB_X$. Από την $(*)$ έχουμε $\|T(z)\| \leq m$ και $\|T(x_0)\| \leq m$. Αρα, γράφοντας το x στη μορφή $x = Mz - (M-1)x_0$ παίρνουμε

$$\|T(x)\| \leq M\|T(z)\| + (M-1)\|T(x_0)\| \leq (2M-1)m.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $T(K) \subseteq aB_Y$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$, με $a = (2M-1)m$. □

Η Πρόταση που ακολουθεί είναι ειδική περίπτωση της αρχής του ομοιόμορφου φράγματος και δίνει κριτήριο για το πότε ένα σύνολο φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών είναι φραγμένο.

Πρόταση 3.1.5. *Έστω X χώρος Banach και έστω $A \subseteq X^*$. Το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup\{|x^*(x)| : x^* \in A\} < +\infty$.*

Απόδειξη. Αν το A είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x^*\| \leq M$ για κάθε $x^* \in A$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\sup\{|x^*(x)| : x^* \in A\} \leq M\|x\| < +\infty.$$

Το αντίστροφο είναι ειδική περίπτωση της αρχής του ομοιόμορφου φράγματος (Θεώρημα 3.1.2). □

Η δυϊκή πρόταση χρησιμοποιεί την κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $A \subseteq X$. Το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sup\{|x^*(x)| : x \in A\} < +\infty$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Τότε, για κάθε $x^* \in X^*$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \, \|x\| \leq M\|x^*\|.$$

Δηλαδή, το $\{x^*(x) : x \in A\}$ είναι φραγμένο.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε το σύνολο $\tau(A) = \{\tau(x) : x \in A\} \subseteq X^{**}$. Το $\tau(A)$ είναι υποσύνολο του δυϊκού του X^* και από την υπόθεσή μας,

$$\sup\{|(\tau(x))(x^*)| : \tau(x) \in \tau(A)\} = \sup\{|x^*(x)| : x \in A\} < +\infty.$$

Αφού ο X^* είναι χώρος Banach, εφαρμόζεται η προηγούμενη Πρόταση (με τους $X^*, X^{**}, \tau(A)$ στην θέση των X, X^*, A αντίστοιχα) και έχουμε ότι το $\tau(A)$ είναι φραγμένο στον X^{**}. Αφού η τ είναι ισομετρία, το A είναι φραγμένο στον X. $\square$

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος δείξτε ότι αν (a_k) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα για κάθε $b = (b_k) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ να συγκλίνει, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$.

2. Αν $x = (x_i)$ και $y = (y_i)$ είναι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

αν βέβαια η σειρά συγκλίνει. Έστω $1 < p < +\infty$, q ο συζυγής εκθέτης του p και $x^{(n)} = (x_i^{(n)})$ μια ακολουθία στον ℓ_p. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $y \in \ell_q$, $\langle x^{(n)}, y \rangle \to 0$.

(β) Υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x^{(n)}\|_p \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $x_i^{(n)} \to 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(\mu)$, $1 < p < +\infty$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $g \in L_q(\mu)$, $\int_\Omega f_n g d\mu \to 0$.

(β) Ισχύει $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$ και για κάθε $E \in \mathcal{A}$, $\int_E f_n d\mu \to 0$.

4. Έστω X χώρος Banach, (f_n) ακολουθία στον X^* και (ϵ_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\epsilon_n \to 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ με την ιδιότητα $|f_n(x)| \leq K_x \epsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

5. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $y \in Y$ ο $T_y : X \to Z$ με $T_y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

3.2 Θεωρήματα ανοικτής απεικόνισης και κλειστού γραφήματος

Ορισμός Έστω X και Y μετρικοί χώροι, και $T : X \to Y$ συνάρτηση. Η T λέγεται *ανοικτή απεικόνιση* αν για κάθε $A \subseteq X$ ανοικτό, το $T(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.

Αν $T : X \to Y$ συνεχής, η T δεν είναι απαραίτητα ανοικτή: για παράδειγμα, η $T : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sin x$ είναι συνεχής, αλλά $T((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.

Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης (Schauder) *Έστω X και Y χώροι Banach, και έστω $T : X \to Y$ φραγμένος <u>και επί</u> γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι ανοικτή απεικόνιση.*

Το θεώρημα είναι ουσιαστικά συνέπεια της ακόλουθης Πρότασης:

Πρόταση 3.2.1. *Αν X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε το $T(D_X(0,1))$ περιέχει ανοικτή μπάλα με κέντρο το 0 στον Y.*

Απόδειξη. **Βήμα 1** Παρατηρήστε ότι

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_X(0,k).$$

Αφού ο T είναι επί, παίρνουμε

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(D_X(0,k)).$$

Άρα,

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{T(D_X(0,k))}.$$

Ο Y είναι πλήρης, και κάθε $\overline{T(D_X(0,k))}$ κλειστό. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει m ώστε το $\overline{T(D_X(0,m))}$ να περιέχει μια μπάλα στον Y. Δηλαδή, υπάρχουν $y_0 \in Y$ και $r > 0$ ώστε

$$D_Y(y_0,\rho) \subseteq \overline{T(D_X(0,m))}. \tag{1}$$

Βήμα 2 Το σύνολο $\overline{T(D_X(0,m))}$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Από την (1) έχουμε $D_Y(-y_0,\rho) = -D_Y(y_0,\rho) \subseteq \overline{T(D_X(0,m))}$ και

$$D_Y(0,\rho) = \frac{1}{2}D_Y(y_0,\rho) + \frac{1}{2}D_Y(-y_0,\rho) \subseteq \overline{T(D_X(0,m))}.$$

Άρα,

$$\overline{T(D_X(0,1))} \supseteq D_Y(0,\rho/m) = D_Y(0,\delta), \tag{2}$$

όπου $\delta = \rho/m$.

Βήμα 3 Είδαμε ότι η κλειστή θήκη της $T(D_X(0,1))$ περιέχει μιά ανοικτή μπάλα $D_Y(0,\delta)$ στον Y. Μένει να δούμε ότι το $T(D_X(0,1))$ έχει την ίδια ιδιότητα.

Θεωρούμε την $D_Y(0,\delta/2)$. Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \delta/2$. Τότε,

$$y \in \frac{1}{2}\overline{T(D_X(0,1))} = \overline{T(D_X(0,1/2))},$$

άρα υπάρχει $x_1 \in D_X(0,1/2)$ ώστε

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

Τότε, $y - Tx_1 \in \frac{1}{2^2}\overline{T(D_X(0,1))} = \overline{T(D_X(0,1/2^2))}$, άρα υπάρχει $x_2 \in D_X(0,1/2^2)$ ώστε

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in D_X(0,1/2^n)$ με την ιδιότητα

$$\|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{3}$$

Η ακολουθία $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι Cauchy στον X: αν $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\| &= \|x_m + \cdots + x_{n+1}\| \leq \|x_m\| + \cdots + \|x_{n+1}\| \\ &< \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $z_n \to x$. Παρατηρούμε ότι

$$\|z_n\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| < \|x_1\| + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \|x_1\| + \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| \leq \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Δηλαδή, $x \in D_X(0,1)$. Από την (3), $T(z_n) = T(x_1) + \cdots + T(x_n) \to y$. Όμως $z_n \to x$ και ο T είναι συνεχής, άρα $T(z_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $T(x) = y$, κι αυτό σημαίνει ότι $y \in T(D_X(0,1))$.

Το $y \in D_Y(0,\delta/2)$ ήταν τυχόν, άρα $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta/2)$. □

Παρατήρηση. Μια πολύ χρήσιμη συνέπεια της απόδειξης του Λήμματος είναι η εξής.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.* □

Απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης: Έστω $A \subseteq X$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι το $T(A)$ είναι ανοικτό: έστω $y \in T(A)$. Υπάρχει $x \in A$ ώστε $Tx = y$. Το A είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε $D_X(x,r) \subseteq A$.

Από την Πρόταση 3.2.1, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$. Τότε,

$$T(D_X(0,r)) = T(rD_X(0,1)) = rT(D_X(0,1)) \supseteq rD_Y(0,\delta) = D_Y(0,\delta r).$$

Αν $y' \in D_Y(y,\delta r)$, τότε $y' - y \in D_Y(0,\delta r)$, άρα υπάρχει $z \in D_X(0,r)$ ώστε $T(z) = y' - y$. Έπεται ότι $x + z \in D_X(x,r)$, και $T(x+z) = y'$. Δηλαδή,

$$T(A) \supseteq T(D_X(x,r)) \supseteq D_Y(y,\delta r).$$

Το $y \in T(A)$ ήταν τυχόν, άρα το $T(A)$ είναι ανοικτό. □

Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης είναι το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη. Ο T^{-1} ορίζεται καλά και είναι γραμμικός τελεστής. Αφού ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, για κάθε $A \subseteq X$ ανοικτό έχουμε ότι το $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Άρα, ο T^{-1} είναι συνεχής. □

Το επόμενο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, το θεώρημα κλειστού γραφήματος, μας δίνει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος.

Ορισμός Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το *γράφημα* του T είναι το σύνολο

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y.$$

Ο T έχει *κλειστό γράφημα* αν ισχύει το εξής:

Αν $x_n \to x$ στον X, $y_n \to y$ στον Y, και $y_n = T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $y = T(x)$.
Ισοδύναμα, αν το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, με νόρμα π.χ. την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (άσκηση).

Θεώρημα κλειστού γραφήματος *Έστω X, Y χώροι Banach, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα $\Gamma(T)$ του T είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $X \times Y$ με νόρμα την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ο $X \times Y$ είναι πλήρης: αν $z_n = (x_n, y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X \times Y$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\varepsilon > \|z_n - z_m\| = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y.$$

Τότε όμως, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ και $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, δηλαδή οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους X, Y αντίστοιχα. Οι X, Y είναι πλήρεις, άρα υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Όμως τότε, αν $z = (x, y)$, έχουμε

$$\|z - z_n\| = \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

Άρα, $z_n \to z$.

Από την υπόθεσή μας, το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, και εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times Y$. Αφού ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach, το $\Gamma(T)$ είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $P : \Gamma(T) \to X$ με $P(x, Tx) = x$. Ο P είναι γραμμικός τελεστής, και

$$P(x, Tx) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow (x, Tx) = (0, 0),$$

άρα ο P είναι ένα προς ένα. Προφανώς, ο P είναι επί. Τέλος, ο P είναι φραγμένος:

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y}.$$

Δηλαδή, $\|P\| \leq 1$.

Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $P^{-1} : X \to \Gamma(T)$ με $P^{-1}(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X\times Y} = \|P^{-1}(x)\|_{X\times Y} \leq M\|x\|_X.$$

Συνεπώς, ο T είναι φραγμένος. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με δύο παραδείγματα που δείχνουν ότι η υπόθεση της πληρότητας των X και Y στα θεωρήματα αντίστροφης απεικόνισης και κλειστού γραφήματος είναι απαραίτητη.

(α) Θεωρούμε τους χώρους $X = C^1[0, 1]$ και $Y = C[0, 1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων και συνεχών $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ αντίστοιχα, με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με $T(f) = f'$.

Ο T είναι γραμμικός τελεστής και έχει κλειστό γράφημα: αν $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ και $\|f_n' - g\|_\infty \to 0$, τότε $f' = g$, δηλαδή $g = T(f)$.

Όμως ο T δεν είναι φραγμένος τελεστής. Αν $f_n(t) = t^n$, τότε $\|f_n\|_\infty = 1$ ενώ $\|T(f_n)\|_\infty = \|nt^{n-1}\|_\infty = n$. Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται και ο λόγος είναι (αναγκαστικά) ότι ο X δεν είναι πλήρης (στο παράδειγμα αυτό, ο Y είναι πλήρης).

(β) Έστω X απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach. Θεωρούμε μια βάση Hamel $\{e_i : i \in I\}$ του X. Το I είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|e_i\| = 1$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε μια δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ με πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς συντελεστές a_i. Θέτουμε

$$\|x\|' = \sum_{i\in I} |a_i|$$

και θεωρούμε τον χώρο $Y = (X, \|\cdot\|')$. Θεωρούμε τώρα την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$. Το γράφημα $\Gamma(I) = \{(x, x) : x \in X\}$ της I είναι κλειστό: έστω ότι $\|x_n - x\| \to 0$ και $\|x_n - y\|' \to 0$. Γενικά,

$$(*) \qquad \|x\| = \left\|\sum_{i\in I} a_i e_i\right\| \leq \sum_{i\in I} |a_i| \cdot \|e_i\| = \sum_{i\in I} |a_i| = \|x\|',$$

άρα $\|x_n - y\|' \to 0 \Rightarrow \|x_n - y\| \to 0$, δηλαδή $y = I(x) = x$.

Όμως ο I δεν είναι φραγμένος. Από την $(*)$ ο I^{-1} είναι φραγμένος, αν λοιπόν ο I ήταν φραγμένος, τότε θα ήταν ισομορφισμός. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει, γιατί ο $(X, \|\cdot\|)$ έχει υποτεθεί διαχωρίσιμος ενώ ο $(X, \|\cdot\|')$ δεν είναι διαχωρίσιμος: παρατηρήστε ότι αν $i \neq j \in I$ τότε $\|e_i - e_j\|' = 2$ και το I είναι υπεραριθμήσιμο.

Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται και ο λόγος είναι αναγκαστικά ότι ο Y δεν είναι πλήρης (στο παράδειγμα αυτό, ο X είναι πλήρης). Το ίδιο παράδειγμα δείχνει ότι η υπόθεση της πληρότητας δεν μπορεί να αφαιρεθεί από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης: ο $I^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος, 1-1 και επί γραμμικός τελεστής αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

Ασκήσεις

1. Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L_1[0,2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1[0,1]$ υπάρχει $\tilde{f} \in X$ ώστε $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in L_1[0,1]$, υπάρχει $\tilde{f} \in X$ με $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$ και $\|\tilde{f}\|_1 \leq M\|f\|_1$.

2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X, με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

3. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ ισχύει $g \circ T \in X^*$.

4. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $K > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq K\|y\|$.

(β) Αν $H : \ell_1 \to Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $G : \ell_1 \to X$ ώστε $T \circ G = H$.

5. Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

6. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$ στον Y, δείξτε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.

Κεφάλαιο 4

Βάσεις Schauder

4.1 Βάσεις Schauder

Ορισμός Έστω X χώρος Banach και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Η (x_n) λέγεται *βάση Schauder* του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Αν (x_n) είναι μια βάση Schauder του X, τότε μπορούμε να βλέπουμε τον X σαν «χώρο ακολουθιών» μέσω της ταύτισης $x \longleftrightarrow (a_1(x), a_2(x), \ldots)$. Η βάση μας παρέχει ένα «σύστημα συντεταγμένων» για τον X.

Έστω ότι η (x_n) είναι βάση Schauder του X. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι τα $x_n, n \in \mathbb{N}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ειδικότερα, $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Επίσης, ο X είναι διαχωρίσιμος (άσκηση).

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_n). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την φυσιολογική «προβολή» $P_n : X \to X$ που ορίζεται μέσω της*

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Τότε, κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και $\sup_n \|P_n\| < +\infty$.

Απόδειξη. Κάθε P_n είναι γραμμικός τελεστής και $P_n \circ P_n = P_n$, κάτι που δικαιολογεί τον όρο «προβολή». Πιό γενικά, αν $n < m$ τότε $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n = P_n$. Αυτό που δεν είναι προφανές είναι ότι οι τελεστές P_n είναι φραγμένοι.

Για κάθε $x \in X$ έχουμε $P_n(x) \to x$, άρα το $\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε μια νέα νόρμα $|||\cdot|||$ στον X μέσω της

$$|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα που ικανοποιεί την

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\| \leq \sup_n \|P_n(x)\| = |||x|||, \quad x \in X.$$

Ισχυρισμός: Ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι πλήρης.

Απόδειξη. Έστω $y^k = \sum_{i=1}^\infty a_i^k x_i$ μια $|||\cdot|||$-Cauchy ακολουθία στον X. Τότε, οι ακολουθίες $(P_n(y^k))_k$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy στον X ομοιόμορφα ως προς n: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(1) \qquad \forall k_1, k_2 \geq k_0(\varepsilon) \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n(y^{k_1}) - P_n(y^{k_2})\| < \varepsilon.$$

Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(P_n(y^k))_k$ βρίσκεται σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης (τον $X_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$), επομένως συγκλίνει σε κάποιο $z_n \in X_n$. Επίσης, λόγω της (1), η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς n. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(2) \qquad \forall k \geq k_0(\varepsilon) \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n(y^{k_1}) - z_n\| \leq \varepsilon.$$

Η ακολουθία $(z_n)_n$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, να έχουμε $\|P_n(y^k) - z_n\| < \varepsilon/3$. Τότε, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε

$$\|z_n - z_m\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|P_n(y^k) - P_m(y^k)\|$$

αν $k \geq k_0$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(y^k) = y^k$, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $k \geq k_0$ και πάρουμε τα n, m αρκετά μεγάλα, βλέπουμε ότι

$$\|P_n(y^k) - P_m(y^k)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

δηλαδή

$$\|z_n - z_m\| < \varepsilon.$$

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $\|z_n - z\| \to 0$. Παρατηρούμε ότι αν $m > n$, τότε

$$(3) \qquad P_n(z_m) = P_n(\lim_k P_m(y^k)) = \lim_k P_n(P_m(y^k)) = \lim_k P_n(y^k) = z_n.$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί όλα τα $P_m(y^k)$ ανήκουν στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $(X_m, \|\cdot\|)$ στον οποίο η P_n είναι συνεχής).

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ ώστε

$$z_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (άσκηση). Έπεται ότι

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i.$$

Τέλος, από την (2) βλέπουμε ότι

$$|||z - y^k||| = \sup_n \|z_n - P_n(y^k)\| \to 0$$

όταν $k \to \infty$, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Θεωρούμε τώρα την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$. Η I είναι γραμμικός, 1-1 και επί τελεστής. Αφού $\|x\| \leq |||x|||$ για κάθε $x \in X$, ο I είναι φραγμένος τελεστής. Οι δύο χώροι είναι πλήρεις, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης: ο I^{-1} είναι φραγμένος, δηλαδή υπάρχει $K > 0$ ώστε

$$\sup_n \|P_n(x)\| = |||x||| \leq K\|x\|$$

για κάθε $x \in X$. Άρα, κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και

$$\sup_n \|P_n\| \leq K < +\infty. \quad \square$$

Ορισμός. Ο αριθμός $M = \sup_n \|P_n\|$ λέγεται *σταθερά της βάσης* (x_i). Αν $M = 1$ τότε η βάση (x_i) λέγεται *μονότονη*.

Από την $P_n \circ P_m = P_n$, $n < m$ παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 4.1.2. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i). Για κάθε $n < m$ και κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ ισχύει*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq M\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|$$

όπου M η σταθερά της βάσης (x_i).

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$. Τότε, $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Το συμπέρασμα προκύπτει από την $\|P_n(x)\| \leq \|P_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|$. □

Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i). Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_i^* : X \to \mathbb{K}$ με $x_i^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = a_i$. Κάθε x_i^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Ορισμός. Η ακολουθία $\{x_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ είναι η *διορθογώνια ακολουθία* της $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i.$$

Επιπλέον, κάθε $x_i^* \in X^*$:

Πρόταση 4.1.3. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i), και έστω (x_i^*) η διορθογώνια ακολουθία της (x_i). Κάθε x_i^* είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και*

$$\|x_i^*\|_* \leq \frac{2M}{\|x_i\|},$$

όπου $M > 0$ η σταθερά της βάσης (x_i).

Απόδειξη. Θέτουμε $P_0 \equiv 0$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Από την $x_i^*(x)x_i = P_i(x) - P_{i-1}(x)$ βλέπουμε ότι

$$|x_i^*(x)| = \frac{1}{\|x_i\|}\,\|P_i(x) - P_{i-1}(x)\| \leq \frac{2M}{\|x_i\|}\,\|x\|,$$

όπου $M > 0$ είναι η σταθερά της βάσης (x_i). □

Πρόταση 4.1.4 (αρχή των μικρών διαταραχών). *Έστω X ένας χώρος Banach και έστω (x_n) βάση Schauder του X, με σταθερά βάσης $M > 0$ και $\delta := \inf\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$. Αν (y_n) είναι ακολουθία στον X η οποία ικανοποιεί την*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{\delta}{2M},$$

τότε η (y_n) είναι επίσης βάση Schauder του X.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$ συγκλίνει: έστω ότι $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in X$. Για κάθε $n < m$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=n}^{m} \lambda_i y_i\right\| &\leq \max_{n\leq i\leq m} |\lambda_i| \sum_{i=n}^{m} \|y_i - x_i\| + \left\|\sum_{i=n}^{m} \lambda_i x_i\right\| \\ &\leq \frac{2M}{\delta}\|x\| \sum_{i=n}^{m} \|y_i - x_i\| + \left\|\sum_{i=n}^{m} \lambda_i x_i\right\|,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα και την $|\lambda_i| = |x_i^*(x)| \leq \frac{2M}{\delta}\|x\|$. Από τις υποθέσεις μας, το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν όταν $n, m \to \infty$. Άρα, η $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ είναι ακολουθία Cauchy στον X. Έπεται ότι υπάρχει το $y = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$.

Ορίζουμε $T : X \to X$ ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|x - T(x)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_n - y_n)\right\| \leq \frac{2M}{\delta}\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|,$$

δηλαδή

$$\|I - T\| \leq \frac{2M}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1.$$

Έπεται ότι ο T είναι ισομορφισμός: ο αντίστροφος του T είναι ο τελεστής $S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k$. Η σύγκλιση της σειράς έπεται από την $\|I - T\| < 1$: Αφού $\|(I - T)^k\| \leq \|I - T\|^k$ για κάθε k, παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|(I - T)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|I - T\|^k = \frac{1}{1 - \|I - T\|}.$$

Χρησιμοποιώντας την $\lim_n (I-T)^n = 0$, βλέπουμε ότι

$$T\left(\sum_{k=0}^{\infty}(I-T)^k\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k\right) = \lim_{n\to\infty}(I-(I-T)^{n+1}) = I.$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(I-T)^k\right)T = I.$$

Δεν είναι τώρα δύσκολο να ελέγξετε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n y_n$: αρκεί να γράψετε το $T^{-1}(x)$ στη μορφή $T^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$. □

4.2 Βασικές ακολουθίες

Ορισμός. Έστω X χώρος Banach και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Η (x_n) λέγεται *βασική ακολουθία* αν είναι βάση για τον υπόχωρο $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ που παράγει. Η επόμενη Πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο για να εξετάζουμε αν μια ακολουθία είναι βασική.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω X χώρος Banach και έστω (x_n) ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων στον X. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την ιδιότητα*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \tag{1}$$

για κάθε $n < m$ και κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.3.2 για τον $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι η (x_n) ικανοποιεί την (1). Παρατηρούμε πρώτα ότι τα διανύσματα x_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$, τότε για κάθε $2 \leq j \leq m$ έχουμε

$$|a_j|\,\|x_j\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{j} a_i x_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i\Big\| \leq 2K\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\Big\| = 0.$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει (με σταθερά K αντί για $2K$) όταν $j = 1$. Έπεται ότι $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Θεωρούμε τον $F = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ο F είναι πυκνός υπόχωρος του Y. Για κάθε n ορίζουμε $P_n : F \to F$ με

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} a_i x_i.$$

Ο P_n είναι καλά ορισμένος, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των x_i, και από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\|P_n\| \leq K$ για κάθε n. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα του F στον Y μπορούμε να επεκτείνουμε τον P_n σε ολόκληρο τον Y, με διατήρηση της $\|P_n\| \leq K$.

Έστω $x \in Y$. Από τον τρόπο ορισμού των P_n βλέπουμε ότι υπάρχει (μοναδική) ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ ώστε

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (χρησιμοποιήστε την $P_n \circ P_m = P_n$ αν $n < m$). Μένει να δείξουμε ότι $P_n(x) \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $z = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in F$ ώστε $\|x - z\| < \varepsilon$. Για κάθε $m > n$ έχουμε $P_m(z) = z$, άρα

$$\begin{aligned} \|x - P_m(x)\| &\leq \|x - z\| + \|z - P_m(z)\| + \|P_m(z) - P_m(x)\| \\ &\leq (1 + \|P_m\|)\, \|x - z\| < (1 + K)\, \varepsilon, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση. Με άλλα λόγια, σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει βασική ακολουθία. Η απόδειξη βασίζεται στο εξής *Λήμμα του Mazur*:

Πρόταση 4.2.2. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την*

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. Ψάχνουμε $x \in S_X$ το οποίο να είναι «κάθετο» στον F (στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert, οποιοδήποτε $x \in S_X$ με $x \perp F$ ικανοποιεί το ζητούμενο, με σταθερά 1, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $\dim(F) < \infty$, η μοναδιαία σφαίρα S_F του F είναι συμπαγής. Άρα, μπορούμε να βρούμε $y_1, \ldots, y_k \in S_F$ τα οποία να σχηματίζουν $\varepsilon/2$–δίκτυο: για κάθε $y \in S_F$ υπάρχει $j \leq k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$.

Από το θεώρημα Hahn–Banach, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ μπορούμε να βρούμε $y_j^* \in X^*$ με $\|y_j^*\| = 1$ και $y_j^*(y_j) = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, συνεπώς, αφού $\dim(X) = \infty$, υπάρχει $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή,

$$y_1^*(x) = \cdots = y_k^*(x) = 0.$$

Έστω $y \in S_F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $j \leq k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \|y + \lambda x\| &\geq \|y_j + \lambda x\| - \|y - y_j\| \geq \|y_j + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq y_j^*(y_j + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = y_j^*(y_j) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\|y\| = 1 \leq (1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|$ για κάθε $y \in S_F$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$. Έπεται το ζητούμενο (εξηγήστε γιατί). $\square$

Θεώρημα 4.2.3. *Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach X περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει βασική ακολουθία (x_i) στον X με σταθερά $M \leq 1+\varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών, με $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon) \leq 1+\varepsilon$.

Θεωρούμε τυχόν $x_1 \in X$ με $\|x_1\| = 1$ και θέτουμε $F_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$. Από το Λήμμα του Mazur υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_2)\|y + a_2x_2\|$$

για κάθε $y \in F_1$ και κάθε $a_2 \in \mathbb{K}$. Θέτουμε $F_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$ και επιλέγουμε $x_3 \in X$ με $\|x_3\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_3)\|y + a_3x_3\|$$

για κάθε $y \in F_2$ και κάθε $a_3 \in \mathbb{K}$.

Στο n–οστό βήμα, θέτουμε $F_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και επιλέγουμε $x_{n+1} \in X$ με $\|x_{n+1}\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\|y + a_{n+1}x_{n+1}\|$$

για κάθε $y \in F_n$ και κάθε $a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ακολουθία (x_i) στον X. Θα δείξουμε ότι: αν $n < m$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, τότε

$$(*) \qquad \left\|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_ix_i\right\|.$$

Για την απόδειξη της $(*)$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε $n \leq k < m$ έχουμε $y_k = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i \in F_k$ και την επιλογή των x_i: έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right\| = \|y_n\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\|y_n + a_{n+1}x_{n+1}\| = (1+\varepsilon_{n+1})\|y_{n+1}\|,$$

και, επαγωγικά,

$$\|y_n\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\|y_{n+1}\| \leq \prod_{j=n+1}^{n+2}(1+\varepsilon_j)\|y_{n+2}\| \leq \cdots \leq \prod_{j=n+1}^{m}(1+\varepsilon_j)\|y_m\|,$$

δηλαδή,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right\| \leq \prod_{j=n+1}^{m}(1+\varepsilon_j)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_ix_i\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_ix_i\right\|.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (x_i) είναι βασική, με σταθερά $M \leq 1+\varepsilon$. $\square$

4.3 Παραδείγματα βάσεων Schauder

Κάποιοι από τους κλασικούς χώρους Banach έχουν μια πολύ φυσιολογική βάση Schauder. Για παράδειγμα, εύκολα ελέγχουμε ότι η συνήθης ακολουθία (e_n), όπου $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ με τη μονάδα στη n-οστή θέση, είναι βάση Schauder για τον $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ και για τον c_0 (άσκηση).

Σε αυτή την Παράγραφο θα συζητήσουμε κάποια κλασικά παραδείγματα βάσεων σε χώρους συναρτήσεων.

Η βάση του Schauder για τον $C[0,1]$

Η βάση του Schauder (f_n) στον $C[0,1]$ ορίζεται ως εξής: οι πρώτες πέντε συναρτήσεις της ακολουθίας είναι οι

(i) $f_0(t) = 1$ στο $[0,1]$.

(ii) $f_1(t) = t$ στο $[0,1]$.

(iii) $f_2(t) = 2t$ στο $[0,1/2]$ και $f_2(t) = 2 - 2t$ στο $[1/2, 1]$.

(iv) $f_3(t) = 4t$ στο $[0,1/4]$, $f_3(t) = 2 - 4t$ στο $[1/4, 1/2]$ και $f_3(t) = 0$ στο $[1/2, 1]$.

(v) $f_4(t) = 0$ στο $[0,1/2]$, $f_4(t) = 4t - 2$ στο $[1/2, 3/4]$ και $f_4(t) = 4 - 4t$ στο $[3/4, 1]$.

Γενικά, αν $k \geq 1$ και $i = 1, \dots, 2^k$, ορίζουμε την f_{2^k+i} θέτοντας

$$f_{2^k+i}(t) = f_2(2^k t - i + 1) \quad \text{αν} \quad \frac{i-1}{2^k} \leq t \leq \frac{i}{2^k}$$

και $f_{2^k+i}(t) = 0$ αλλιώς (κάνετε ένα σχήμα).

Βασική παρατήρηση. Θεωρούμε την αρίθμηση $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1/2$, $t_3 = 1/4$, $t_5 = 3/4$ κλπ των δυαδικών ρητών $k/2^m$ του $[0,1]$. Από τον τρόπο ορισμού των f_n έχουμε

$$f_n(t_n) = 1 \quad \text{και} \quad f_m(t_n) = 0 \;\text{ αν } m > n.$$

Έπεται ότι οι f_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες (άσκηση).

Βασική συνέπεια του τρόπου ορισμού των f_n είναι η εξής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{f_0, f_1, \dots, f_{2^n}\}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο F_n των κατά τμήματα γραμμικών συνεχών συναρτήσεων που έχουν κόμβους στους δυαδικούς ρητούς $k/2^n$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$. Αυτό προκύπτει εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι και οι δύο χώροι έχουν διάσταση $2^n + 1$. Μια βάση του F_n είναι η $\{g_0, g_1, \dots, g_{2^n}\}$, όπου η g_i ορίζεται μονοσήμαντα από τις $g_i(l/2^n) = \delta_{il}$, $l = 0, 1, \dots, 2^n$.

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι ο υπόχωρος που παράγουν οι f_n είναι πυκνός στον $C[0,1]$. Αυτό προκύπτει από την προηγούμενη παρατήρηση και από το γεγονός ότι $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}^{\|\cdot\|_\infty} = C[0,1]$ (για τον τελευταίο ισχυρισμό, χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των δυαδικών ρητών στο $[0,1]$).

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.1, προκειμένου να δείξουμε ότι η (f_n) είναι βάση για τον $C[0,1]$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την ιδιότητα

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big\| \leq K \Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\Big\| \tag{1}$$

για κάθε $n < m$ και κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η (1) ισχύει με $K = 1$ (η (f_n) είναι μονότονη βάση του $C[0,1]$): θέτουμε $P_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$ και $P_m = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $k \leq n$ ισχύει

$$P_m(t_k) = \sum_{i=0}^{m} a_i f_i(t_k) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(t_k) = P_n(t_k),$$

αφού $f_{n+1}(t_k) = \cdots = f_m(t_k) = 0$. Έπεται ότι

$$\|P_n\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |P_n(t_k)| = \max_{0\leq k\leq n} |P_m(t_k)| \leq \max_{0\leq k\leq m} |P_m(t_k)| = \|P_m\|_\infty.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι η $(f_n)_{n\geq 0}$ είναι βάση Schauder του $C[0,1]$. Κάθε $f \in C[0,1]$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$. Χρησιμοποιώντας μάλιστα την βασική παρατήρηση, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τους συντελεστές a_n: έχουμε

$$a_n = f(t_n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_k(t_n)$$

για κάθε $n \geq 0$, απ΄ όπου υπολογίζονται διαδοχικά οι $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

Το σύστημα Haar στον $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$

Το σύστημα Haar (h_n) στον $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ ορίζεται ως εξής: οι πρώτες τάσσερις συναρτήσεις της ακολουθίας είναι οι

(i) $h_0(t) = 1$ στο $[0,1]$.

(ii) $h_1(t) = 1$ στο $[0,1/2]$ και $h_1(t) = -1$ στο $(1/2,1]$.

(iii) $h_2(t) = 1$ στο $[0,1/4]$, $h_2(t) = -1$ στο $(1/4,1/2]$ και $h_2(t) = 0$ στο $(1/2,1]$.

(iv) $h_3(t) = 0$ στο $[0,1/2)$, $h_3(t) = 1$ στο $[1/2,3/4]$ και $h_3(t) = -1$ στο $(3/4,1]$.

Γενικά, αν $k \geq 1$ και $i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, ορίζουμε την h_{2^k+i} θέτοντας

$$h_{2^k+i}(t) = h_1(2^k t - i) \quad \text{αν} \quad \frac{i}{2^k} \leq t \leq \frac{i+1}{2^k}$$

και $h_{2^k+i}(t) = 0$ αλλιώς (κάνετε ένα σχήμα). Παρατηρήστε ότι το σύστημα Haar συνδέεται με τη βάση του Schauder ως εξής: για κάθε $n \geq 1$,

$$f_n(t) = 2^{n-1} \int_0^t h_{n-1}(s)\, ds.$$

Βασικές παρατηρήσεις. (α) Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\int_0^1 h_n(t)\,dt = 0.$$

(β) Αν $n < m$ τότε συμβαίνει ένα από τα εξής δύο: είτε οι h_n, h_m έχουν ξένους φορείς ή ο φορέας της h_m περιέχεται στον φορέα της h_n και η h_n είναι σταθερή (ίση με 1 ή -1) στον φορέα της h_m. Σε κάθε περίπτωση, αν $n \neq m$ έχουμε

$$\int_0^1 h_n(t)h_m(t)\,dt = 0.$$

(γ) Από το (β) έπεται ότι οι h_n, $n \geq 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες: αν $a_1h_1 + \cdots + a_nh_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \int_0^1 (a_1h_1 + \cdots + a_nh_n)(t)h_j(t)\,dt = a_j.$$

Θα δείξουμε ότι η $(h_n)_{n\geq 0}$ είναι μονότονη βάση του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε πρώτα ότι ο υπόχωρος που παράγουν οι h_n είναι πυκνός στον $L_p[0,1]$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω H_k ο υπόχωρος που παράγουν οι χ_I, όπου I διάστημα της μορφής $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]$, $i = 1, \ldots, 2^k$. Η διάσταση του H_k είναι 2^k και οι $h_0, h_1, \ldots, h_{2^k-1}$ ανήκουν στον H_k και είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα,

$$H_k = \mathrm{span}\{h_n : 0 \leq n \leq 2^k - 1\} \subseteq \overline{\mathrm{span}\{h_n : n \geq 0\}}^{\|\cdot\|_p}.$$

Δεδομένου ότι $L_p[0,1] = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k}^{\|\cdot\|_p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$L_p[0,1] = \overline{\mathrm{span}\{h_n : n \geq 0\}}^{\|\cdot\|_p}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.1, προκειμένου να δείξουμε ότι η (h_n) είναι μονότονη βάση για τον $L_p[0,1]$, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $g = \sum_{k=0}^{n} a_kh_k$ και για κάθε $a_{n+1} \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\|g\|_p^p \leq \|g + a_{n+1}h_{n+1}\|_p^p.$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι σταθερή (ίση, ας πούμε, με c) στον φορέα I της h_{n+1} ενώ η $g + a_{n+1}h_{n+1}$ παίρνει τις τιμές $c \pm a_{n+1}$ σε δύο διαστήματα μήκους $|I|/2$. Στο $[0,1] \setminus I$ οι g, $g + a_{n+1}h_{n+1}$ συμπίπτουν. Άρα,

$$\begin{aligned}
\|g + a_{n+1}h_{n+1}\|_p^p - \|g\|_p^p &= \int_I (|c + a_{n+1}h_{n+1}(t)|^p - |c|^p)\,dt \\
&= \frac{|I|}{2}\left(|c + a_{n+1}|^p + |c - a_{n+1}|^p - 2|c|^p\right).
\end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι μη αρνητική: όταν $p \geq 1$, η $x \mapsto |x|^p$ είναι κυρτή, συνεπώς, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

με $x = c + a_{n+1}$ και $y = c - a_{n+1}$ έχουμε το ζητούμενο.

Ασκήσεις

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder την (x_n). Δείξτε ότι η (x_n) είναι μονότονη βάση για τον $(X, |||\cdot|||)$, όπου $|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|$.

2. Έστω X χώρος Banach και (x_n) βάση Schauder του X. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Ακόμα ισχυρότερα, δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \notin \overline{\text{span}\{x_m : m \neq n\}}.$$

3. Έστω (x_n) και (y_n) βάσεις Schauder των χώρων Banach X και Y. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει στον X αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ συγκλίνει στον Y.

(β) Υπάρχει $C > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$,

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n y_n\right\| \leq C\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right\|.$$

4. (α) Έστω X ένας χώρος Banach με βάση Schauder και έστω D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι ο X έχει βάση Schauder που αποτελείται από στοιχεία του D.

(β) Δείξτε ότι ο $C[0,1]$ έχει βάση Schauder που αποτελείται από πολυώνυμα.

5. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder την (x_n). Αν (x_n^*) είναι η ακολουθία των διορθογώνιων συναρτησοειδών, δείξτε ότι η (x_n^*) είναι βασική ακολουθία στον X^*.

6. Με τον συμβολισμό της προηγούμενης Άσκησης, δείξτε ότι η (x_n^*) είναι βάση Schauder του X^* αν και μόνο αν, για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S_{X_n}} |x^*(x)| = 0,$$

όπου $X_n = \overline{\text{span}}\{x_m : m \geq n\}$.

7. Ορίζουμε $x_n = e_1 + \cdots + e_n$ στον c_0. Εξετάστε αν η (x_n) είναι βάση Schauder για τον c_0. Προσδιορίστε την διορθογώνια ακολουθία (x_n^*) και εξετάστε αν είναι βάση Schauder του ℓ_1.

8. Έστω X ένας χώρος Banach και έστω (x_n) βάση Schauder για τον X με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n - x_{n-1})$ (όπου $x_0 = 0$) είναι επίσης βάση Schauder του X.

9. Έστω X ένας χώρος Banach. Μια ακολουθία (x_n) λέγεται ασθενής βάση για τον X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί $a_n \in \mathbb{K}$ με την ιδιότητα $x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = x^*(x)$. Δείξτε ότι η (x_n) είναι ασθενής βάση για τον X αν και μόνο αν είναι βάση Schauder για τον X.

Κεφάλαιο 5

Ασθενείς τοπολογίες

5.1 Συναρτησοειδές του Minkowski

Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Ένα μη κενό υποσύνολο A του X λέγεται **ισορροπημένο** αν για κάθε $x \in A$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| \leq 1$ έχουμε $\lambda x \in A$. Το A λέγεται **απορροφούν** αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $tx \in A$ για κάθε $t \in [0, \varepsilon_x)$. Από τους δύο ορισμούς είναι φανερό ότι κάθε ισορροπημένο ή απορροφούν υποσύνολο του X περιέχει το 0. Αν $a \in A$, το A λέγεται **απορροφούν στο** a αν το σύνολο $A - a$ είναι απορροφούν: δηλαδή, αν αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $a + tx \in A$ για κάθε $t \in [0, \varepsilon_x)$.

Ένα ισορροπημένο και απορροφούν σύνολο $A \subseteq X$ είναι κατά κάποιον τρόπο «περιοχή» του 0: σε κάθε «διεύθυνση» $x \neq 0$ περιέχει ένα διάστημα $(-\varepsilon_x x, \varepsilon_x x)$ και αν $x_0 \in A$ τότε ολόκληρο το διάστημα $[-x_0, x_0]$ περιέχεται στο A.

Έστω τώρα $p : X \to \mathbb{R}^+$ μια ημινόρμα. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Λήμμα 5.1.1. *Το A είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του.*

Απόδειξη. (α) Το A είναι κυρτό: αν $x, y \in A$ και $t \in (0, 1)$, τότε

$$p((1-t)x + ty) \leq p((1-t)x) + p(ty) = (1-t)p(x) + tp(y) < 1,$$

άρα $(1-t)x + ty \in A$.
(β) Το A είναι ισορροπημένο: αν $x \in A$ και $|\lambda| \leq 1$, τότε

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leq p(x) < 1,$$

δηλαδή $\lambda x \in A$.
(γ) Το A είναι απορροφούν σε κάθε σημείο του: έστω $a \in A$ και $x \in X$. Αν $p(x) = 0$, τότε $p(a + tx) \leq p(a) < 1$ για κάθε $t \geq 0$. Αν $p(x) > 0$, τότε θέτουμε $\varepsilon_x = \frac{1-p(a)}{2p(x)} > 0$ και, για κάθε $0 \leq t < \varepsilon_x$ ελέγχουμε ότι

$$p(a + tx) \leq p(a) + tp(x) < p(a) + \frac{1-p(a)}{2} = \frac{1+p(a)}{2} < 1,$$

δηλαδή $a + tx \in A$. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει το Λήμμα 2.4.1:

Πρόταση 5.1.2. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του X, το οποίο είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του. Τότε, υπάρχει μοναδική ημινόρμα $p_A : X \to \mathbb{R}^+$ με την ιδιότητα $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε
$$p_A(x) := \inf\{t \geq 0 : x \in tA\}.$$
Το A είναι απορροφούν στο 0, άρα, για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{t \geq 0 : x \in tA\}$ είναι μη κενό. Αυτό δείχνει ότι η p_A ορίζεται καλά. Δείχνουμε πρώτα τις ιδιότητες της ημινόρμας:

(α) $p_A(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$.

Αν $\lambda = 0$ το (α) ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\lambda \neq 0$. Από το γεγονός ότι το A είναι ισορροπημένο, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $\beta A = |\beta| A$ για κάθε $\beta \in \mathbb{K}$ (άσκηση). Τότε, γράφουμε

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{t \geq 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\left\{t \geq 0 : x \in \frac{t}{\lambda} A\right\} \\ &= \inf\left\{t \geq 0 : x \in \frac{t}{|\lambda|} A\right\} = |\lambda| \inf\{s \geq 0 : x \in sA\} = |\lambda| p_A(x). \end{aligned}$$

(β) $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $t, s \geq 0$ με $t < p_A(x) + \varepsilon$, $s < p_A(y) + \varepsilon$ και $x \in tA$, $y \in sA$. Από την κυρτότητα του A έπεται ότι $tA + sA = (t+s)A$, άρα $x + y \in (t+s)A$. Συνεπώς, $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το (β).

Δείχνουμε τώρα ότι $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$. Αν $p_A(x) = r < 1$, υπάρχει $s : r < s < 1$ και $x \in sA$. Όμως, $sA \subseteq A$ από την κυρτότητα του A και την $0 \in A$. Άρα,
$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A.$$
Αντίστροφα, έστω $x \in A$. Το A είναι απορροφούν στο x, μπορούμε λοιπόν να βρούμε $t > 0$ ώστε $x + tx \in A$. Όμως, τότε, $p_A(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$.

Τέλος, αν q είναι μια άλλη ημινόρμα με $A = \{x \in X : q(x) < 1\}$, εύκολα βλέπουμε ότι $q \equiv p_A$: για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $p_A(x) > q(x)$ για κάποιο $x \in X$. Τότε,

$$q\left(\frac{x}{p_A(x)}\right) < 1 \Longrightarrow \frac{x}{p_A(x)} \in A, \quad \text{ενώ} \quad p_A\left(\frac{x}{p_A(x)}\right) = 1 \Longrightarrow \frac{x}{p_A(x)} \notin A. \qquad \square$$

Παρατήρηση. Η απεικόνιση p_A είναι το **συναρτησοειδές Minkowski** του A. Η απόδειξη της Πρότασης 5.1.2 δείχνει ότι αν το A υποτεθεί κυρτό, ισορροπημένο και *απορροφούν στο* 0, τότε η p_A ορίζεται καλά και είναι ημινόρμα. Τότε, $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A$ χωρίς να ισχύει απαραίτητα ισότητα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το A είναι κυρτό και απορροφούν (τότε, $0 \in A$). Με αυτές τις υποθέσεις, δεν μπορούμε να δείξουμε ότι η p_A ικανοποιεί το (α), ικανοποιεί όμως την $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ αν $\lambda \geq 0$. Το (β) εξακολουθεί να ισχύει, αφού η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας χρησιμοποιεί μόνο την κυρτότητα του A. Έχουμε λοιπόν το εξής συμπέρασμα:

Πρόταση 5.1.3. *Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του X, το οποίο είναι κυρτό και απορροφούν. Τότε, το συναρτησοειδές Minkowski $p_A : X \to \mathbb{R}^+$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, και*

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : p(x) \leq 1\}.$$

5.2 Τοπικά κυρτοί χώροι

Ορισμός. *Τοπολογικός γραμμικός χώρος* είναι ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με μια τοπολογία $\mathcal{T}$ ώστε τα μονοσύνολα να είναι κλειστά σύνολα και οι πράξεις του γραμμικού χώρου

(α) $+ : X \times X \to X$ με $(x, y) \mapsto x + y$

(β) $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ με $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

να είναι συνεχείς ως προς τις αντίστοιχες (σε κάθε περίπτωση) τοπολογίες.

Παραδείγματα. (α) Κάθε χώρος με νόρμα είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, αν πάρουμε σαν $\mathcal{T}$ την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα.

(β) Ο $L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$, είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, αν πάρουμε σαν $\mathcal{T}$ την τοπολογία που επάγεται από την μετρική $d(f, g) = \int_0^1 |f - g|^p$ (δείξτε ότι οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι συνεχείς). Όμως, η $\mathcal{T}$ δεν προέρχεται από νόρμα, αφού δεν υπάρχουν μη τετριμμένα $\mathcal{T}$–συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή $f : L_p[0, 1] \to \mathbb{K}$.

Παρατηρήσεις. Για κάθε $x \in X$, η $\tau_x : X \to X$ με $\tau_x(y) = x + y$ είναι ομοιομορφισμός: είναι συνεχής, και η αντίστροφή της είναι η τ_{-x} η οποία είναι επίσης συνεχής. Όμοια, αν $\lambda \neq 0$, τότε η $\sigma_\lambda : X \to X$ με $\sigma_\lambda(x) = \lambda x$ είναι ομοιομορφισμός (εδώ, $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{1/\lambda}$). Έπεται ότι: αν $\mathcal{B}_0$ είναι μια βάση περιοχών του 0 για την $\mathcal{T}$, τότε, για κάθε $x \in X$, η $\mathcal{B}_x = x + \mathcal{B}_0 := \{x + B : B \in \mathcal{B}_0\}$ είναι βάση περιοχών του x (άσκηση: δείξτε αυτούς τους ισχυρισμούς).

Αν Y είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X τότε ο χώρος πηλίκο γίνεται τοπολογικός γραμμικός χώρος με την τοπολογία που επάγεται από την τοπολογία του X: θεωρούμε την $Q : X \to X/Y$ με $Q(x) = x + Y$ και συμφωνούμε ότι ένα $E \subseteq X/Y$ είναι ανοικτό αν το $Q^{-1}(E)$ είναι ανοικτό στον X.

Σε αυτή την Παράγραφο θα μας απασχολήσει μια ειδική κατηγορία τοπολογικών γραμμικών χώρων, στην οποία συμπεριλαμβάνονται οι χώροι με νόρμα. Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{P}$ μια οικογένεια από ημινόρμες $p : X \to \mathbb{R}^+$, η οποία **διαχωρίζει τα σημεία** του X: αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}$ ώστε $p(x - y) > 0$.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_0 = \{A = \{x \in X : p(x) < \varepsilon\} : p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}.$$

Η $\mathcal{A}$ γίνεται υποβάση για μια τοπολογία στον X, με τον εξής τρόπο: θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{(x_1 + A_1) \cap \cdots \cap (x_n + A_n) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}_0, x_i \in X\} \cup \{X\}.$$

Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X: η $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια όλων των ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{B}$. Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος (άσκηση: οι $+$ και $\cdot$ είναι $\mathcal{T}$–συνεχείς). Αν $x_0 \in X$, μια βάση περιοχών του x_0 για την $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{(x_0 + A_1) \cap \cdots \cap (x_0 + A_n) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}_0\}$$

(άσκηση). Με άλλα λόγια, ένα μη κενό σύνολο $U \subseteq X$ είναι $\mathcal{T}$–ανοικτό αν για κάθε $x_0 \in U$ υπάρχουν $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon_i\} \subseteq U.$$

Η υπόθεση ότι η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, μας εξασφαλίζει ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι Hausdorff: αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}$ με $p(x - y) > 0$. Έπεται ότι τα $\{z \in X : p(z-x) < p(x-y)/2\}$ και $\{z \in X : p(z-y) < p(x-y)/2\}$ είναι ξένες $\mathcal{T}$–ανοικτές περιοχές των x, y αντίστοιχα.

Ορισμός. *Τοπικά κυρτός χώρος* είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με μια τοπολογία $\mathcal{T}$ η οποία ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ που διαχωρίζει τα σημεία του X.

Θα μας απασχολήσουν δύο παραδείγματα τοπικά κυρτών χώρων:

(1) (X, w). Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x^* : X \to \mathbb{K}$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο την ημινόρμα $p_{x^*} : X \to \mathbb{R}^+$ με

$$p_{x^*}(x) = |x^*(x)|.$$

Η οικογένεια $\mathcal{P} = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ διαχωρίζει τα σημεία του X: από το θεώρημα Hahn–Banach, αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ με $x^*(x - y) \neq 0$, δηλαδή

$$p_{x^*}(x - y) = |x^*(x - y)| > 0.$$

Συνεπώς, η $\mathcal{P}$ ορίζει τοπικά κυρτή τοπολογία στον X, την οποία συμβολίζουμε με w. Η w είναι η **ασθενής τοπολογία** στον X. Αν $x_0 \in X$, μια βάση w–περιοχών του x_0 αποτελείται από τα σύνολα της μορφής

$$\{x \in X : |x_i^*(x) - x_i^*(x_0)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $x_i^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ (άσκηση: γιατί μπορούμε να πάρουμε το ε κοινό για όλα τα i;).

(2) (X^*, w^*). Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω X^* ο δυϊκός του. Κάθε $x \in X$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο την ημινόρμα $p_x : X^* \to \mathbb{R}^+$ με

$$p_x(x^*) = |x^*(x)|.$$

Η οικογένεια $\mathcal{P} = \{p_x : x \in X\}$ διαχωρίζει τα σημεία του X^*: αν $x^*, y^* \in X^*$ και $x^* \neq y^*$, τότε υπάρχει $x \in X$ με $x^*(x) \neq y^*(x)$, δηλαδή

$$p_x(x^* - y^*) = |x^*(x) - y^*(x)| > 0.$$

Συνεπώς, η $\mathcal{P}$ ορίζει τοπικά κυρτή τοπολογία στον X^*, την οποία συμβολίζουμε με w^*. Η w^* είναι η **ασθενής-$*$ τοπολογία** στον X^*. Αν $x_0^* \in X^*$, μια βάση w^*–περιοχών του x_0^* αποτελείται από τα σύνολα της μορφής

$$\{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon,\, i = 1, \ldots, n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ και $\varepsilon > 0$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει έναν χαρακτηρισμό των τοπικά κυρτών χώρων με βάση τη μορφή των περιοχών του 0:

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω X ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστω $\mathcal{U}$ η οικογένεια των ανοικτών, κυρτών και ισορροπημένων υποσυνόλων του X. Τότε, ο X είναι τοπικά κυρτός αν και μόνο αν η $\mathcal{U}$ είναι βάση περιοχών του 0.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι τοπικά κυρτός. Από τον ορισμό της τοπολογίας $\mathcal{T}$ του X, η οικογένεια

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon_i\} : n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i > 0, p_i \in \mathcal{P} \right\}$$

είναι βάση περιοχών του 0. Όμως, κάθε σύνολο στην $\mathcal{B}_0$ είναι κυρτό και ισορροπημένο. Άρα, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{U}$, δηλαδή η $\mathcal{U}$ είναι βάση περιοχών του 0.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος με την ιδιότητα η $\mathcal{U}$ να είναι βάση περιοχών του 0. Για κάθε $A \in \mathcal{U}$ θεωρούμε το συναρτησοειδές Minkowski p_A του A. Παρατηρήστε ότι κάθε $A \in \mathcal{U}$ είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του (το τελευταίο γιατί το A είναι ανοικτό και οι πράξεις του γραμμικού χώρου συνεχείς). Άρα, κάθε p_A, $A \in \mathcal{U}$, είναι ημινόρμα. Θεωρούμε την οικογένεια ημινορμών

$$\mathcal{P} = \{p_A : A \in \mathcal{U}\}$$

και την τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}$ που αυτή ορίζει στον X. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}$ ταυτίζεται με την αρχική τοπολογία $\mathcal{T}_0$ του X. Η υποβάση της $\mathcal{T}$ αποτελείται από τα σύνολα της μορφής

$$\{x \in X : p_A(x - x_0) < \varepsilon\} = x_0 + \varepsilon A, \quad A \in \mathcal{U}, x_0 \in X, \varepsilon > 0,$$

τα οποία είναι $\mathcal{T}$–ανοικτά. Άρα, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0$. Αντίστροφα, κάθε $\mathcal{T}_0$–ανοικτό σύνολο είναι ένωση κάποιων $A_i \in \mathcal{U}$. Όμως κάθε $A \in \mathcal{U}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$, αφού $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$.

Έπεται ότι $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, δηλαδή η $\mathcal{T}_0$ είναι τοπικά κυρτή τοπολογία. $\square$

Παραδείγματα. (α) Κάθε χώρος με νόρμα είναι τοπικά κυρτός: η τοπολογία του παράγεται από μία ημινόρμα, τη νόρμα του χώρου.

(β) Η τοπολογία του $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$, δεν είναι τοπικά κυρτή. Είδαμε ότι το μοναδικό μη κενό, ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $L_p[0,1]$ είναι ο ίδιος ο $L_p[0,1]$. Επομένως, η $\mathcal{U}$ δεν είναι βάση περιοχών του 0 σε αυτή την περίπτωση.

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει ικανή συνθήκη για τη μετρικοποιησιμότητα ενός τοπικά κυρτού χώρου (τότε, η σύγκλιση στο χώρο μπορεί να περιγραφεί μέσω ακολουθιών).

Πρόταση 5.2.2. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος του οποίου η τοπολογία $\mathcal{T}$ ορίζεται από μια αριθμήσιμη οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε, ο X είναι μετρικοποιήσιμος. Δηλαδή, μπορούμε να ορίσουμε μετρική d στον X με την ιδιότητα: κάθε d–ανοικτό σύνολο είναι $\mathcal{T}$–ανοικτό σύνολο και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε στον X μια μετρική d ως εξής: αν $x, y \in X$, θέτουμε

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Είναι εύκολο να δείξετε ότι η d είναι μετρική στον X. Για την $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ θα χρειαστείτε το γεγονός ότι η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει τα σημεία του X.

Έστω U ένα d–ανοικτό σύνολο και έστω $x_0 \in U$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in X$ και $d(x,x_0) < \delta$, τότε $x \in U$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}$, και θεωρούμε το σύνολο

$$A = \bigcap_{n=1}^{N} \{x \in X : p_n(x-x_0) < \frac{\delta}{2}\}.$$

Το A είναι $\mathcal{T}$–ανοικτή περιοχή του x_0 και $A \subseteq U$. Πράγματι, αν $x \in A$ τότε

$$\begin{aligned} d(x,x_0) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-x_0)}{1+p_n(x-x_0)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-x_0)}{1+p_n(x-x_0)} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \right) \max_{n \leq N} p_n(x-x_0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

άρα $x \in U$. Αφού το x_0 ήταν τυχόν στο U, το U είναι $\mathcal{T}$–ανοικτό.

Αντίστροφα, έστω U ένα $\mathcal{T}$–ανοικτό σύνολο και έστω $x_0 \in U$. Υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\bigcap_{i=1}^{N} \{x \in X : p_n(x-x_0) < \varepsilon\} \subseteq U$. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2^N} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$. Αν $d(x,x_0) < \delta$, τότε, για κάθε $n = 1, \ldots, N$ έχουμε

$$\frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-x_0)}{1+p_n(x-x_0)} \leq d(x,x_0) < \frac{1}{2^N} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

απ' όπου έπεται ότι $p_n(x-x_0) < \varepsilon$ για κάθε $n = 1, \ldots, N$. Δηλαδή, αν $d(x,x_0) < \delta$ τότε $x \in U$. Άρα, το U είναι d–ανοικτό σύνολο. $\square$

5.3 Διαχωριστικά θεωρήματα σε τοπικά κυρτούς χώρους

Έστω X ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος. Μιμούμενοι την απόδειξη που έγινε στη περίπτωση των χώρων με νόρμα, μπορείτε να δείξετε ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{K}$ είναι συνεχές αν και μόνο αν είναι συνεχές στο 0, το οποίο με τη σειρά του ισχύει αν και μόνο αν ο πυρήνας του f είναι κλειστός υπόχωρος του X (ως προς την τοπολογία του X).

Στην περίπτωση που ο X είναι τοπικά κυρτός, έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό για τη συνέχεια ενός γραμμικού συναρτησοειδούς.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος που η τοπολογία του ορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$, και έστω $f : X \to \mathbb{K}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, το f είναι συνεχές αν και μόνο αν υπάρχουν $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ και $a > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$,*

$$(*) \qquad |f(x)| \leq a(p_1(x) + \cdots + p_n(x)).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, υπάρχει βασική περιοχή B του 0 με την ιδιότητα: αν $x \in B$ τότε $|f(x)| < 1$. Δηλαδή, υπάρχουν ημινόρμες $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$(1) \qquad x \in \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} \implies |f(x)| < 1.$$

Έπεται ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}(p_1(x) + \cdots + p_n(x)).$$

[Πράγματι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|f(x)| = 1$ και από την (1) βλέπουμε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $p_i(x) \geq \varepsilon$, οπότε $|f(x)| = 1 \leq \frac{1}{\varepsilon}(p_1(x) + \cdots + p_n(x))$.]

Το αντίστροφο είναι απλό: κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι $\mathcal{T}$–συνεχής. Υποθέτουμε ότι ισχύει η $(*)$ και θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$. Το $B = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \frac{\delta}{an}\}$ είναι $\mathcal{T}$–ανοικτή περιοχή του x_0 και, για κάθε $x \in B$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq a(p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)) < \delta.$$

Άρα, η f είναι $\mathcal{T}$–συνεχής. □

Στη συνέχεια περιγράφουμε τις γενικεύσεις των διαχωριστικών θεωρημάτων που αποδείξαμε στην Παράγραφο 2.4. Βασικό ρόλο παίζει η εξής παραλλαγή των Προτάσεων 5.2.2 και 5.2.3.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω X ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστω A ένα ανοικτό κυρτό υποσύνολο του X που περιέχει το 0. Τότε, το συναρτησοειδές Minkowski q_A του A είναι μη αρνητικό συνεχές υπογραμμικό συναρτησοειδές, και $A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}$.*

Απόδειξη. Το A είναι κυρτό και απορροφούν (γιατί είναι ανοικτό και περιέχει το 0). Από την Πρόταση 5.1.3, το q_A είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, μη αρνητικό εξ ορισμού. Για την ισότητα $A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}$, μιμηθείτε το επιχείρημα της Πρότασης 5.1.2: θα χρειαστείτε το γεγονός ότι το A είναι απορροφούν σε κάθε σημείο του, διότι είναι ανοικτό. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει και η συνέχεια του q_A: αν $x \in x_0 + \varepsilon A$, τότε $|q_A(x) - q_A(x_0)| \leq q_A(x - x_0) < \varepsilon$. □

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω X ένας πραγματικός τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστω A μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του X που δεν περιέχει το 0. Τότε, υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\tilde{f}(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A$. Το $A' = x_0 - A$ είναι ανοικτό, κυρτό και περιέχει το 0. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.3, το μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές $q = q_{A'} : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $q(x) < 1$ αν και μόνο αν $x \in A'$. Ειδικότερα, $q(x_0) \geq 1$ γιατί $x_0 \notin A'$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \mathrm{span}\{x_0\}$ που παράγει το x_0, και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda q(x_0)$. Η f φράσσεται από το q: αν $\lambda \geq 0$, τότε $f(\lambda x_0) = q(\lambda x_0)$, ενώ αν $\lambda < 0$, τότε $f(\lambda x_0) < 0 \leq q(\lambda x_0)$. Από την πρώτη μορφή του θεωρήματος Hahn–Banach, η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, με $\tilde{f}(x) \leq q(x)$ για κάθε $x \in X$.

Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x_0 - x \in A'$, άρα $q(x_0 - x) < 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\tilde{f}(x_0) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0 - x) \leq q(x_0 - x) < 1.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $q(x_0) \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall x \in A, \quad \tilde{f}(x) > \tilde{f}(x_0) - 1 = q(x_0) - 1 \geq 0.$$

Τέλος, από την $|f(x)| \leq \max\{q(x), q(-x)\}$ προκύπτει ότι η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο 0, άρα συνεχής. □

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω X πραγματικός τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστω A, B ξένα κυρτά σύνολα, με το A ανοικτό. Τότε, υπάρχουν συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(a) < \lambda$ αν $a \in A$, και $f(b) \geq \lambda$ αν $b \in B$. Αν το B είναι κι αυτό ανοικτό, τότε τα A, B διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ακριβώς όμοια με αυτήν του Θεωρήματος 2.4.3. □

Λήμμα 5.3.5. *Έστω X ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος, K ένα συμπαγές υποσύνολο του X, και A ανοικτό υποσύνολο του X με $K \subseteq A$. Τότε, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του 0 με $K + U + U \subseteq A$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό: αν W είναι μια ανοικτή περιοχή του 0 στον X, τότε υπάρχει συμμετρική ανοικτή περιοχή U του 0 (δηλαδή, $U = -U$) με $U + U \subseteq W$. Πράγματι, από την συνέχεια της πρόσθεσης μπορούμε να βρούμε ανοικτές περιοχές U_1, U_2 του 0 με $U_1 + U_2 \subseteq W$. Θέτουμε $U = U_1 \cap U_2 \cap (-U_1) \cap (-U_2)$ και έχουμε τον ισχυρισμό.

Επαγωγικά, βλέπουμε ότι αν W είναι μια ανοικτή περιοχή του 0 στον X, τότε υπάρχει συμμετρική ανοικτή περιοχή U του 0 με $U + \cdots + U \subseteq W$ (n φορές).

Δείχνουμε τώρα το Λήμμα: Έστω $x \in K$. Τότε, $x \in A$ και το A είναι ανοικτό, άρα υπάρχει συμμετρική ανοικτή περιοχή U_x του 0 ώστε $x + U_x + U_x + U_x \subseteq A$. Από τη συμμετρία της U_x έπεται ότι

$$(x + U_x + U_x) \cap ((X \setminus A) + U_x) = \emptyset.$$

Θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη $\{x + U_x : x \in K\}$ του K. Το K είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in K$ ώστε

$$K \subseteq (x_1 + U_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + U_{x_n}).$$

Αν θέσουμε $U = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$, βλέπουμε εύκολα ότι $K + U + U \subseteq A$. □

Θεώρημα 5.3.6. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω A, B ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του X. Αν το B είναι συμπαγές, τότε τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά.*

Απόδειξη. Αφού τα A, B είναι ξένα, το συμπαγές B περιέχεται στο ανοικτό $X \setminus A$. Ο χώρος είναι τοπικά κυρτός, άρα υπάρχει βάση περιοχών $\mathcal{U}$ που αποτελείται από ανοικτά, κυρτά και ισορροπημένα (άρα, συμμετρικά) σύνολα. Από το Λήμμα, υπάρχει τέτοια περιοχή U με την ιδιότητα $B + U + U \subseteq X \setminus A$. Άρα, $(B + U) \cap (A + U) = \emptyset$. Τα $B + U, A + U$ είναι ανοικτά και, από το Θεώρημα 5.3.4, διαχωρίζονται γνήσια. Έπεται το θεώρημα (για να δείξετε ότι τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά, θα χρειαστείτε τη συμπάγεια του B). □

Το Θεώρημα 5.3.6 μας επιτρέπει να δείξουμε ότι ο δυϊκός ενός τοπικά κυρτού χώρου είναι αρκετά πλούσιος ώστε να διαχωρίζει σημεία, σημείο από κλειστό υπόχωρο κλπ (κάτι που είχαμε δει στην περίπτωση των χώρων με νόρμα).

Πόρισμα 5.3.7. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος, A κλειστό κυρτό υποσύνολο του X και $x_0 \notin A$. Υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές που διαχωρίζει γνήσια τα $\{x_0\}$ και A.* □

Ασκήσεις

1. Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to 0$. Δείξτε ότι

$$y_n := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0.$$

2. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω A, B μη κενά, ξένα κυρτά υποσύνολα του X ώστε $0 \notin \overline{A - B}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

3. Έστω L_0 ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν είναι σχεδόν παντού ίσες). Ορίζουμε μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στον L_0 παίρνοντας σαν βάση περιοχών του 0 την ακολουθία των συνόλων

$$B_n = \left\{ f \in L_0 : \lambda(\{x : |f(x)| > 1/n\}) < \frac{1}{n} \right\}$$

και την $\{f + B_n : n \in \mathbb{N}\}$ σαν βάση περιοχών της $f \in L_0$. Δείξτε ότι:

(α) Ο $(L_0, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

(β) Ο $(L_0, \mathcal{T})$ δεν είναι τοπικά κυρτός (υπόδειξη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{co}(B_n) = L_0$).

(γ) $L_0^* = \{0\}$.

4. Έστω L_0 ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν είναι σχεδόν παντού ίσες). Στον L_0 θεωρούμε τη μετρική

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $\rho(f_n, f) \to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ κατά μέτρο. Συγκρίνετε την τοπολογία που επάγει η ρ στον L_0 με την $\mathcal{T}$ της προηγούμενης άσκησης.

5. Έστω $0 < p < 1$. Έστω ℓ_p ο γραμμικός χώρος των ακολουθιών $x = (x_n)$ με $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Στον ℓ_p θεωρούμε τη μετρική $d(x,y) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p$. Δείξτε ότι ο (ℓ_p, d) είναι πλήρης και ότι ο ℓ_p είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, όχι τοπικά κυρτός, με την τοπολογία που επάγει η d. Περιγράψτε τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών στον ℓ_p.

5.4 Η ασθενής τοπολογία

Στην Παράγραφο 5.2 ορίσαμε την w–τοπολογία σε έναν χώρο X με νόρμα, σαν την τοπικά κυρτή τοπολογία που ορίζεται στον X από την οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$, όπου $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$. Μια βάση περιοχών του 0 αποτελείται από τα σύνολα της μορφής

$$B(x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon) = \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $x_i^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι, αν ο X είναι απειροδιάστατος, τότε οι w-περιοχές του 0 δεν είναι φραγμένα σύνολα: έχουμε

$$\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(x_i^*) \subset B(x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon)$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, δηλαδή κάθε w–περιοχή του 0 περιέχει κάποιον υπόχωρο του X πεπερασμένης συνδιάστασης.

Πρόταση 5.4.1. *Κάθε w–ανοικτό σύνολο είναι $\|\cdot\|$-ανοικτό.*

Απόδειξη. Έστω U ένα w–ανοικτό σύνολο. Τότε,

$$U = \bigcup_{x \in U} (x + B_x),$$

όπου B_x ειναι w–ανοικτή βασική περιοχή του 0. Όμως, κάθε B_x είναι σύνολο της μορφής

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\}$$

δηλαδή $\|\cdot\|$–ανοικτό σύνολο (διότι, κάθε $x_i^* \in X^*$ είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$). Έπεται ότι το U είναι $\|\cdot\|$–ανοικτό. □

Πρόταση 5.4.2. *Έστω (x_i) δίκτυο στον X και $x \in X$. Τότε, $x_i \xrightarrow{w} x$ αν και μόνο αν $x^*(x_i) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$.*

Απόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι αν $x^* \in X^*$ τότε το x^* είναι w–συνεχές: αρκεί να ελέγξουμε ότι το x^* είναι w–συνεχές στο 0, το οποίο είναι προφανές αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{x \in X : |x^*(x)| < \varepsilon\}$ είναι w–ανοικτό.

Αυτή η παρατήρηση μας δίνει αμέσως την μία κατεύθυνση: αν $x_i \xrightarrow{w} x$, τότε $x^*(x_i) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι $x^*(x_i) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Έστω U μια w–ανοικτή περιοχή του x. Υπάρχουν $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\{y \in X : |x_k^*(y) - x_k^*(x)| < \varepsilon,\, k = 1, \ldots, n\} \subseteq U.$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ υπάρχει i_k ώστε: αν $i \geq i_k$ τότε $|x_k^*(x_i) - x_k^*(x)| < \varepsilon$. Βρίσκουμε $i_0 \geq i_k$ για κάθε $k \leq n$. Τότε, για κάθε $i \geq i_0$ έχουμε $|x_k^*(x_i) - x_k^*(x)| < \varepsilon$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Δηλαδή, $x_i \in U$. Έπεται ότι $x_i \xrightarrow{w} x$. □

(α) Ασθενώς συνεχή συναρτησοειδή

Συμβολίζουμε με $(X, w)^*$ τον γραμμικό χώρο των w–συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{K}$ και με X^* τον δυϊκό του $(X, \|\cdot\|)$, τον γνωστό μας χώρο των $\|\cdot\|$–φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών. Θα δείξουμε ότι

$$(X, w)^* = X^*.$$

Η απόδειξη βασίζεται στο εξής Λήμμα:

Λήμμα 5.4.3. *Έστω $g, f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{K}$ γραμμικά συναρτησοειδή με την ιδιότητα $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Τότε, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : X \to \mathbb{K}^n$ με

$$T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

και το γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : T(X) \to \mathbb{K}$ με

$$\psi(T(x)) = g(x).$$

Ο $T(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$ και το ψ είναι καλά ορισμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $T(X)$: αν $T(x_1) = T(x_2) \in T(X)$, τότε $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, άρα $x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k)$. Από την υπόθεση, $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(g)$, δηλαδή $g(x_1) = g(x_2)$. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα.

Η ψ επεκτείνεται σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{\psi} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε: για κάθε $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\tilde{\psi}(t_1, \ldots, t_n) = a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n.$$

Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$g(x) = \psi(T(x)) = \tilde{\psi}(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x).$$

Δηλαδή, $g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$. □

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τότε, $(X, w)^* = X^*$.*

Απόδειξη. Έχουμε παρατηρήσει ότι $X^* \subseteq (X, w)^*$. Αντίστροφα, έστω $f : X \to \mathbb{K}$ ένα w–συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Υπάρχει βασική περιοχή $B(x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon)$ ώστε: αν $x \in B(x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon)$ τότε $|f(x)| < 1$. Δηλαδή, αν $|x_k^*(x)| < \varepsilon$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, τότε $|f(x)| < 1$.

Αυτό έχει σαν συνέπεια την $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(x_k^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Πράγματι, αν $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(x_k^*)$, τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k = 1, \ldots, n$ έχουμε $|x_k^*(mx)| = 0 < \varepsilon$. Άρα, $|f(mx)| < 1 \Longrightarrow |f(x)| < \frac{1}{m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $f(x) = 0$.

Από το Λήμμα 5.4.3 υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $f = a_1 x_1^* + \cdots + a_n x_n^*$. Αυτό δείχνει ότι $f \in X^*$. Συνεπώς, $(X, w)^* \subseteq X^*$. □

(β) Ασθενής κλειστή θήκη – θεώρημα Mazur

Έστω $A \subseteq X$. Αφού η w–τοπολογία είναι μικρότερη από την $\|\cdot\|$–τοπολογία, έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{A}^{\|\cdot\|} &= \bigcap \{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ και } B\ \|\cdot\| - \text{κλειστό}\} \\ &\subseteq \bigcap \{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ και } B\ w - \text{κλειστό}\} = \overline{A}^{w}. \end{aligned}$$

Αν όμως το A είναι κυρτό, τότε ισχύει ισότητα:

Θεώρημα 5.4.5 (Mazur). *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω A κυρτό υποσύνολο του X. Τότε,*

$$\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε για απλότητα ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Είδαμε ότι $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{w}$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \overline{A}^{w} \setminus \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Το $\{x_0\}$ είναι συμπαγές και το $\overline{A}^{\|\cdot\|}$ είναι κυρτό και κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$. Συνεπώς, υπάρχουν $x^* \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{x \in A} x^*(x) = \sup_{x \in \overline{A}^{\|\cdot\|}} x^*(x) < \lambda < x^*(x).$$

Όμως, $x_0 \in \overline{A}^{w}$, άρα υπάρχει δίκτυο (x_i) στο A με $x_i \xrightarrow{w} x$, και

$$x^*(x_0) = \lim_i x^*(x_i) \leq \sup_{x \in A} x^*(x).$$

Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο. □

Άμεσες (και χρήσιμες) συνέπειες του θεωρήματος του Mazur είναι οι εξής.

Πόρισμα 5.4.6. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Ένα κυρτό υποσύνολο του X είναι ασθενώς κλειστό αν και μόνο αν είναι $\|\cdot\|$–κλειστό.* □

Πόρισμα 5.4.7. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Τότε, $\overline{Y}^{w} = \overline{Y}^{\|\cdot\|}$.* □

Πόρισμα 5.4.8. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_i \xrightarrow{w} 0$. Τότε, υπάρχει ακολουθία (y_k) κυρτών συνδυασμών των x_n ώστε $\|y_k\| \to 0$.*

Σημείωση. Κάθε y_k είναι διάνυσμα της μορφής $y_k = \sum_{n=1}^{N_k} a_{kn}x_n$, όπου $a_{kn} \geq 0$ και $\sum_{n=1}^{N_k} a_{kn} = 1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $A = \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ όλων των κυρτών συνδυασμών των x_n. Το A είναι κυρτό, άρα $\overline{A}^w = \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Από την υπόθεση, έχουμε

$$0 \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^w \subseteq \overline{A}^w.$$

Έπεται ότι $0 \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$, άρα υπάρχει ακολουθία (y_k) στο A με $\|y_k\| \to 0$. □

(γ) Ασθενώς συνεχείς τελεστές

Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο T είναι *ασθενώς συνεχής* αν είναι συνεχής συνάρτηση ως προς τις ασθενείς τοπολογίες των X και Y.

Θεώρημα 5.4.9. *Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι ασθενώς συνεχής.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι φραγμένος. Για να ελέγξουμε ότι ο T είναι ασθενώς συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε την w–συνέχεια στο 0: έστω W μια ασθενής περιοχή του 0 στον Y. Υπάρχουν $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\{y \in Y : |y_k^*(y)| < \varepsilon,\, k = 1, \ldots, n\} \subseteq W.$$

Ορίζουμε $x_k^* : X \to \mathbb{K}$ με $x_k^* = y_k^* \circ T$. Κάθε x_k^* είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|x_k^*\| \leq \|y_k^*\| \cdot \|T\|$. Ορίζουμε

$$V := \{x \in X : |x_k^*(x)| < \varepsilon,\, k = 1, \ldots, n\}.$$

Η V είναι w–περιοχή του 0 στον X και αν $x \in V$ τότε $|y_k^*(Tx)| = |x_k^*(x)| < \varepsilon$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δηλαδή $T(x) \in W$. Άρα, $0 \in V \subseteq T^{-1}(W)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο T είναι ασθενώς συνεχής. Αν $y^* \in Y^* = (Y, w)^*$, τότε (ως σύνθεση ασθενώς συνεχών συναρτήσεων) $y^* \circ T \in (X, w)^* = X^*$. Δηλαδή,

$$y^* \in Y^* \Longrightarrow y^* \circ T \in X^*.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, θα δείξουμε ότι ο T έχει $\|\cdot\|$–κλειστό γράφημα.

Έστω ότι $\|x_n - x\| \to 0$ και $\|Tx_n - y\| \to 0$. Για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε

$$(y^* \circ T)(x_n) = y^*(Tx_n) \to y^*(y)$$

διότι $Tx_n \to y$, και

$$(y^* \circ T)(x_n) \to (y^* \circ T)(x) = y^*(Tx),$$

διότι $y^* \circ T \in X^*$ και $x_n \to x$. Άρα, για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $y^*(Tx) = y^*(y)$. Αφού ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y, παίρνουμε $y = Tx$. Δηλαδή, το $\Gamma(T)$ είναι $\|\cdot\|$–κλειστό. Από το θεώρημα κλειστού γραφήματος, ο T είναι φραγμένος. □

5.5 Η ασθενής-$*$ τοπολογία

Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω X^* ο δυϊκός του. Ορίζουμε την w^*–τοπολογία στον X^* σαν την τοπικά κυρτή τοπολογία που επάγεται από την οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \{p_x : x \in X\}$, όπου $p_x(x^*) = |x^*(x)|$. Μια βάση περιοχών του 0 για την w^*–τοπολογία αποτελείται από τα σύνολα της μορφής

$$B(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon > 0$. Αν ο X είναι απειροδιάστατος, τότε οι w^*-περιοχές του 0 δεν είναι φραγμένα σύνολα: αν τ είναι η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}, έχουμε

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\tau(x_i)) \subset B(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, δηλαδή κάθε w^*–περιοχή του 0 περιέχει κάποιον υπόχωρο του X^* άπειρης διάστασης.

Οι παρακάτω ιδιότητες της w^*–τοπολογίας είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες της w–τοπολογίας:

Πρόταση 5.5.1. *Έστω (x_i^*) δίκτυο στον X^* και $x^* \in X^*$. Τότε, $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_i^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$.* □

Πρόταση 5.5.2. *Κάθε w–ανοικτό σύνολο είναι $\|\cdot\|$-ανοικτό.*

Απόδειξη. Έπεται από το γεγονός ότι κάθε σύνολο

$$B(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{x^* \in X^* : |[\tau(x_i)](x^*)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

είναι $\|\cdot\|_*$–ανοικτό υποσύνολο του X^*. □

Πρόταση 5.5.3. *Έστω $(X^*, w^*)^*$ ο γραμμικός χώρος των w^*–συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f : X^* \to \mathbb{K}$. Τότε,*

$$(X^*, w^*)^* = \tau(X).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 5.5.1 βλέπουμε ότι $\tau(X) \subseteq (X^*, w^*)^*$. Αντίστροφα, έστω $f : X^* \to \mathbb{K}$ ένα w^*–συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Υπάρχει βασική περιοχή $B(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ ώστε: αν $x^* \in B(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ τότε $|f(x^*)| < 1$. Δηλαδή, αν $|[\tau(x_k)](x^*)| < \varepsilon$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, τότε $|f(x^*)| < 1$. Έπεται ότι $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\tau(x_k)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Από το Λήμμα 5.4.3 υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $f = a_1\tau(x_1) + \cdots + a_n\tau(x_n) = \tau(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$. Αυτό δείχνει ότι $f \in \tau(X)$. □

Θεώρημα 5.5.4 (Alaoglu). *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Η μοναδιαία μπάλα $B_{X^*} = \{x^* : \|x^*\| \leq 1\}$ του X^* είναι w^*–συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το $D = \prod_{x \in B_X} [-\|x\|, \|x\|]$ με την τοπολογία γινόμενο: ένα δίκτυο $(t_i^x)_{x \in B_X}$ στο D συγκλίνει στο $(t^x)_{x \in B_X}$ αν και μόνο αν $\lim_i t_i^x = t^x$ για κάθε $x \in B_X$. Από το θεώρημα του Tychonoff, ο D είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Ορίζουμε $G : (B_{X^*}, w^*) \to D$ με $G(x^*) = (x^*(x))_{x \in B_X}$. Από την $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ έπεται ότι $G(x^*) \in D$ για κάθε $x^* \in B_{X^*}$. Επίσης, αν $x_1^*, x_2^* \in B_{X^*}$ και $G(x_1^*) = G(x_2^*)$, τότε $x_1^*(x) = x_2^*(x)$ για κάθε $x \in B_X$, οπότε $x_1^* \equiv x_2^*$. Άρα, η G είναι 1-1.

Η G είναι συνεχής: υποθέτουμε ότι $x_i^*, x^* \in B_{X^*}$ και $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Τότε, $x_i^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in B_X$, οπότε $G(x_i^*) \to G(x^*)$ στο D, από τον ορισμό της τοπολογίας του D.

Η εικόνα $G(B_{X^*})$ της G είναι κλειστή στο D: έστω $x_i^* \in B_{X^*}$ με $G(x_i^*) \to (t^x)_{x \in B_X} \in D$. Τότε, για κάθε $x \in B_X$ έχουμε

$$t^x = \lim_i x_i^*(x).$$

Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{K}$ με $f(x) = \|x\| t^{x/\|x\|}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$f(x) = \|x\|\, t^{x/\|x\|} = \|x\| \lim_i x_i^* \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \lim_i x_i^*(x)$$

για κάθε $x \in X$, ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Επίσης,

$$|f(x)| = \|x\| \left| t^{x/\|x\|} \right| \leq \|x\|,$$

άρα $f \in B_{X^*}$ και $x_i^* \xrightarrow{w^*} f$. Αφού $G(f) = (t^x)_{x \in B_X}$, συμπεραίνουμε ότι το $G(B_{X^*})$ είναι κλειστό.

Τέλος, ελέγχουμε ότι η G^{-1} είναι συνεχής στο $G(B_{X^*})$. Αν $G(x_i^*) \to G(x^*)$ στο D, τότε $x_i^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in B_X$, άρα $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Έπεται ότι η $B_{X^*} = G^{-1}(G(B_{X^*}))$ είναι w^*–συμπαγής. □

Πόρισμα 5.5.5. *Έστω X ένας χώρος Banach. Ένα υποσύνολο A του X^* είναι w^*–συμπαγές αν και μόνο αν είναι w^*–κλειστό και $\| \cdot \|$–φραγμένο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι w^*–κλειστό και $A \subseteq aB_{X^*}$ για κάποιον $a > 0$. Η απεικόνιση $\sigma_a : X^* \to X^*$ με $\sigma_a(x^*) = ax^*$ είναι w^*–ομοιομορφισμός. Από το θεώρημα Alaoglu έπεται ότι το aB_{X^*} είναι w^*–συμπαγές σύνολο. Το A είναι w^*–κλειστό υποσύνολο του aB_{X^*}, άρα είναι w^*–συμπαγές.

Αντίστροφα: αν το A είναι w^*–συμπαγές, τότε το A είναι προφανώς w^*–κλειστό και για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{|x^*(x)| : x^* \in A\} = \{|[\tau(x)](x^*)| : x^* \in A\}$ είναι φραγμένο. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος έπεται ότι $\sup\{\|x^*\| : x^* \in A\} < \infty$. □

Πρόταση 5.5.6. *Κάθε χώρος Banach X είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν κλειστό υπόχωρο ενός χώρου $(C(M), \| \cdot \|_\infty)$, όπου M συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff.*

Απόδειξη. Θέτουμε $M = B_{X^*}$. Από το θεώρημα Alaoglu, ο M είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff με την w^*–τοπολογία.

Ορίζουμε την απεικόνιση $T : X \to (C(M), \|\cdot\|_\infty)$ με $(Tx)(x^*) = x^*(x)$, $x^* \in M$. Η T είναι καλά ορισμένη. Έστω $x \in X$. Αν $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ στο M, τότε $x_i^*(x) \to x^*(x)$, δηλαδή $(Tx)(x_i^*) \to (Tx)(x^*)$. Άρα, $Tx \in C(M)$. Η γραμμικότητα της T ελέγχεται εύκολα, και

$$\|Tx\|_\infty = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*\} = \|x\|$$

για κάθε $x \in X$, δήλαδή η T είναι ισομετρία. Άρα, η T είναι ισομετρικός ισομορφισμός του X με έναν κλειστό υπόχωρο του $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$. □

Θεώρημα 5.5.7 (Goldstine). *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $\tau : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση. Τότε,*

$$\overline{\tau(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}.$$

Απόδειξη. Η τ είναι γραμμική ισομετρία, άρα το $\tau(B_X)$ είναι κυρτό υποσύνολο της $B_{X^{**}}$ και το $\overline{\tau(B_X)}^{w^*}$ είναι w^*–κλειστό κυρτό υποσύνολο της $B_{X^{**}}$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0^{**} \in B_{x^{**}} \setminus \overline{\tau(B_X)}^{w^*}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Στον τοπικά κυρτό χώρο (X^{**}, w^*) μπορούμε να διαχωρίσουμε το x_0^{**} από το $\overline{\tau(B_X)}^{w^*}$: υπάρχει $f \in (X^{**}, w^*)^*$, δηλαδή υπάρχει $x_0^* \in X^*$ ώστε

$$x_0^{**}(x_0^*) > \sup_{x \in B_X} [\tau(x)](x_0^*) = \sup_{x \in B_X} |x_0^*(x)| = \|x_0^*\|.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$x_0^{**}(x_0^*) \leq \|x_0^{**}\| \, \|x_0^*\| \leq \|x_0^*\|,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Έπεται ότι $\overline{\tau(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$. □

Πόρισμα 5.5.8. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $\tau : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση. Τότε,*

$$\overline{\tau(X)}^{w^*} = X^{**}.$$

Απόδειξη. Ο $\overline{\tau(X)}^{w^*}$ είναι υπόχωρος του X^{**} και περιέχει την $B_{X^{**}}$ από το προηγούμενο θεώρημα. □

Με τη βοήθεια των ασθενών τοπολογιών μπορούμε να δώσουμε έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των αυτοπαθών χώρων. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ο χώρος Banach X είναι αυτοπαθής. Τότε, η $\tau : (B_X, w) \to (B_{X^{**}}, w^*)$ είναι τοπολογικός ομοιομορφισμός. Από την αυτοπάθεια του X βλέπουμε ότι η τ είναι 1-1 και επί. Επίσης, αν $x, x_i \in B_X$, $i \in I$, έχουμε

$$\begin{aligned} x_i \xrightarrow{w} x &\iff \forall x^* \in X^* \quad x^*(x_i) \to x^*(x) \\ &\iff \forall x^* \in X^* \quad [\tau(x_i)](x^*) \to [\tau(x)](x^*) \\ &\iff \tau(x_i) \xrightarrow{w^*} \tau(x), \end{aligned}$$

δηλαδή, οι τ, τ^{-1} είναι συνεχείς. Από το θεώρημα Alaoglu, η $B_{X^{**}}$ είναι w^*–συμπαγής. Συνεπώς, η B_X είναι συμπαγής. Ισχύει όμως και το αντίστροφο:

Θεώρημα 5.5.9. *Έστω X ένας χώρος Banach. Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν η B_X είναι w–συμπαγής.*

Απόδειξη. Δείχνουμε την δεύτερη συνεπαγωγή: έστω ότι η B_X είναι w–συμπαγής. Τότε, το $\tau(B_X)$ είναι w^*–συμπαγές σύνολο (παρατηρήστε ότι η τ είναι (w, w^*)–συνεχής). Άρα, το $\tau(B_X)$ είναι w^*–κλειστό σύνολο. Από το θεώρημα Goldstine έχουμε

$$\tau(B_X) = \overline{\tau(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\tau(X) = X^{**}$. Άρα, ο X είναι αυτοπαθής.

Δύο ιδιότητες των αυτοπαθών χώρων

(α) Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ασθενώς Cauchy* αν για κάθε $x^* \in X^*$ η ακολουθία $x^*(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy (ισοδύναμα, συγκλίνει). Ο X λέγεται *ασθενώς ακολουθιακά πλήρης* αν κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία του X είναι ασθενώς συγκλίνουσα.

Πρόταση 5.5.10. *Κάθε αυτοπαθής χώρος Banach X είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) μια w–Cauchy ακολουθία στον X. Για κάθε $x^* \in X^*$, το σύνολο $\{|x^*(x_n)| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο, διότι το $\lim_n x^*(x_n)$ υπάρχει. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το MB_X είναι w–συμπαγές λόγω της αυτοπάθειας του X. Άρα, το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ασθενές σημείο συσσώρευσης $x \in MB_X$. Έστω $x^* \in X^*$. Αφού το $\lim_n x^*(x_n)$ υπάρχει, αναγκαστικά έχουμε $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{w} x$. □

(β) Έστω X ένας χώρος με νόρμα και έστω Y ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Αν $x_0 \in X \setminus Y$, η *απόσταση* του x_0 από τον Y είναι η

$$d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}.$$

Δεν είναι γενικά σωστό ότι υπάρχει $y_0 \in Y$ με $d(x_0, Y) = \|x_0 - y_0\|$. Αν όμως ο X είναι αυτοπαθής, αυτό είναι πάντα σωστό.

Πρόταση 5.5.11. *Έστω X αυτοπαθής χώρος, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Υπάρχει $y_0 \in Y$ με $d := d(x_0, Y) = \|x_0 - y_0\|$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M = \{y \in Y : \|x_0 - y\| \leq 2d\}$. Τότε,

$$d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in M\}.$$

Το σύνολο M είναι $\|\cdot\|$–φραγμένο (αν $y \in M$ τότε $\|y\| \leq \|x_0\| + 2d$) και w–κλειστό: αυτό προκύπτει εύκολα από το θεώρημα Mazur, αφού το M είναι κυρτό και $\|\cdot\|$–κλειστό. Ο X έχει υποτεθεί αυτοπαθής, άρα το M είναι w–συμπαγές.

Ισχυρισμός: Η $f : M \to \mathbb{R}^+$ με $y \mapsto \|x_0 - y\|$ είναι κάτω ημισυνεχής.

Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{y \in M : \|x_0 - y\| \leq a\}$ είναι w–κλειστό: αν $\|x_0 - y_i\| \leq a$ και $y_i \xrightarrow{w} y$, τότε για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ έχουμε

$$|x^*(x_0 - y)| = \lim_i |x^*(x_0 - y_i)| \leq \sup_i \|x_0 - y_i\| \leq a,$$

άρα $\|x_0 - y\| \leq a$.

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε κάτω ημισυνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές σύνολο παίρνει ελάχιστη τιμή: θεωρήστε $y_i \in M$ με $f(y_i) \downarrow d$. Υπάρχει υποδίκτυο $y_j \xrightarrow{w} y_0 \in M$. Τότε,

$$d \leq \|x_0 - y_0\| = f(y_0) \leq \liminf_j f(y_j) = d.$$

Άρα, $\|x_0 - y_0\| = f(y_0) = d(x_0, Y)$. □

5.6 Μετρικοποιησιμότητα και διαχωρισιμότητα

Η ασθενής τοπολογία σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμη: Ας υποθέσουμε ότι ο (X, w) είναι μετρικοποιήσιμος. Κάθε μετρικός χώρος έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών για κάθε σημείο του. Συνεπώς, υπάρχει ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων D_n του X^* ώστε η ακολουθία (U_n) με

$$U_n = \{x \in X : |x^*(x)| < \varepsilon_n,\ x^* \in D_n\}$$

να είναι w–βάση περιοχών του 0. Τότε, για το σύνολο $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ έχουμε:

$$(*) \qquad X^* = \mathrm{span}\{x^* : x^* \in D\}.$$

Πράγματι, αν $x^* \in X^*$, το $U_{x^*} = \{x : |x^*(x)| < 1\}$ είναι w–περιοχή του 0. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $U_n \subseteq U_{x^*}$. Όμως τότε, το x^* είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του D_n (δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.4).

Από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι ο X^* έχει αριθμήσιμη βάση σαν γραμμικός χώρος: έχουμε όμως δει ότι αυτό δεν μπορεί να ισχύει για έναν απειροδιάστατο χώρο Banach.

Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει για την ασθενή-$*$ τοπολογία.

Υπάρχουν παρ' όλα αυτά κάποια αποτελέσματα μετρικοποιησιμότητας για φραγμένα υποσύνολα των X, X^*. Η χρησιμότητά τους είναι προφανής: αν η w (αντίστοιχα, η w^*) τοπολογία στην B_X (αντίστοιχα, στην B_{X^*}) προέρχονται από μετρική, τότε η ασθενής σύγκλιση στα φραγμένα σύνολα περιγράφεται από ακολουθίες.

Θεώρημα 5.6.1. *Έστω X ένας χώρος Banach. Η w^*–τοπολογία στην B_{X^*} προέρχεται από μετρική αν και μόνο αν ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Έστω $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X. Ορίζουμε μετρική d στην B_{X^*} με

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{1 + |x^*(x_n) - y^*(x_n)|}.$$

Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $I : (B_{X^*}, w^*) \to (B_{X^*}, d)$.

Η I είναι συνεχής: έστω ότι $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε

$$U = \{y^* \in B_{X^*} : |y^*(x_n) - x^*(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2},\, n \leq N\}.$$

Υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_i^* \in U$ για κάθε $i \geq i_0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, για κάθε $i \geq i_0$ έχουμε

$$d(x_i^*, x^*) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 1 < \varepsilon.$$

Άρα, $x_i^* \xrightarrow{d} x^*$.

Από το θεώρημα του Alaoglu, η (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής. Αφού η I είναι συνεχής, 1-1 και επί, είναι ομοιομορφισμός. Δηλαδή, οι d και w^* τοπολογίες ταυτίζονται στην B_{X^*}.

Αντίστροφα, αν η w^*–τοπολογία στην B_{X^*} προέρχεται από μετρική, τότε υπάρχει αριθμήσιμη w^*–βάση (U_n) περιοχών του 0, όπου κάθε U_n είναι σύνολο της μορφής

$$U_n = \{x^* \in B_{X^*} : |x^*(x)| < \varepsilon_n,\, x \in D_n\}$$

για κάποιο $\varepsilon_n > 0$ και κάποιο πεπερασμένο $D_n \subseteq X$, και $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$.

Θέτουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Παρατηρούμε ότι: αν $x^* \in B_{X^*}$ και $x^*(x) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $x^* \in U_n$ για κάθε n, άρα $x^* = 0$. Από πόρισμα του θεωρήματος Hahn–Banach έπεται ότι $\overline{\text{span}}(D) = X$. Αφού το D είναι αριθμήσιμο, ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Θεώρημα 5.6.2. *Έστω X ένας χώρος Banach. Η w–τοπολογία στην B_X προέρχεται από μετρική αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Έστω $\tau : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση. Από το προηγούμενο θεώρημα, η w^*–τοπολογία στην $B_{X^{**}}$ προέρχεται από μετρική. Η $\tau : (B_X, w) \to (\tau(B_X), w^*)$ είναι ομοιομορφισμός (εξηγήστε γιατί), άρα η (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμη, αφού η $\tau(B_X)$ με την σχετική w^*–τοπολογία είναι μετρικός χώρος.

Αντίστροφα, αν η w–τοπολογία στην B_X προέρχεται από μετρική, τότε υπάρχει αριθμήσιμη w–βάση περιοχών (U_n) του 0, όπου κάθε U_n είναι σύνολο της μορφής

$$U_n = \{x \in B_X : |x^*(x)| < \varepsilon_n,\, x^* \in D_n^*\}$$

για κάποιο $\varepsilon_n > 0$ και κάποιο πεπερασμένο $D_n^* \subseteq X^*$, και $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$.

Θέτουμε $D^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^*$ και $X_1^* = \overline{\text{span}}(D^*)$. Ο X_1^* είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του X^*. Θα δείξουμε ότι $X_1^* = X^*$: έστω ότι υπάρχει $y^* \in X^* \setminus X_1^*$. Τότε, $d = d(y^*, X_1^*) > 0$ και, από πόρισμα του θεωρήματος Hahn–Banach, υπάρχει $x^{**} \in X^{**}$ που ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\|x^{**}\| = 1/d$,

(β) $x^{**}(y^*) = 1$ και $x^{**}(x^*) = 0$ για κάθε $x^* \in X_1^*$.

Θεωρούμε το w–ανοικτό σύνολο (στην B_X)

$$V = \left\{ x \in B_X : |y^*(x)| < \frac{d}{2} \right\}.$$

Αφού η (U_n) είναι w–βάση περιοχών του 0, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $U_n \subseteq V$.

Έχουμε $dx^{**} \in B_{X^{**}}$ και από το θεώρημα Goldstine η $\tau(B_X)$ είναι w^*–πυκνή στην $B_{X^{**}}$. Άρα, υπάρχει $x \in B_X$ το οποίο ικανοποιεί τα εξής:

(i) $|dx^{**}(x^*) - \tau(x)(x^*)| < \varepsilon_n$ για κάθε $x^* \in D_n^*$.

(ii) $|dx^{**}(y^*) - \tau(x)(y^*)| < \frac{d}{2}$.

Από την πρώτη συνθήκη έπεται ότι $|x^*(x)| < \varepsilon_n$ για κάθε $x^* \in D_n^*$, δηλαδή $x \in U_n$. Από την δεύτερη συνθήκη έχουμε

$$|d - y^*(x)| = |dx^{**}(y^*) - y^*(x)| < \frac{d}{2},$$

δηλαδή $|y^*(x)| > \frac{d}{2}$. Άρα, $x \notin V$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $x \in U_n \setminus V$, το οποίο είναι άτοπο αφού $U_n \subseteq V$. □

Παρατηρήστε ότι, αν η w–τοπολογία στην B_X προέρχεται από μετρική, τότε ο X^* είναι διαχωρίσιμος, άρα ο X είναι διαχωρίσιμος. Το αντίστροφο δεν είναι πάντα σωστό:

Θεώρημα 5.6.3 (Schur). *Στον ℓ_1, κάθε w–συγκλίνουσα ακολουθία είναι $\|\cdot\|$–συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.6.1 και από το θεώρημα Alaoglu, η (B_{ℓ_∞}, w^*) είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Μια μετρική που ορίζει την w^*–τοπολογία είναι η

$$d(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Έστω $x_k = (x_{kn}) \in \ell_1$ με $x_k \xrightarrow{w} 0$. Θα δείξουμε ότι $\|x_k\|_1 \to 0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_m = \left\{ a = (a_n) \in B_{\ell_\infty} : \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{kn} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3},\, k \geq m \right\}.$$

Κάθε F_m είναι w^*–κλειστό σύνολο και από την $x_k \xrightarrow{w} 0$ έπεται ότι $B_{\ell_\infty} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ (εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το F_m να έχει μη κενό w^*–εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $a = (a_n) \in F_m$ και $\delta > 0$ ώστε

$$d(a,b) < \delta \Longrightarrow b \in F_m.$$

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}$ και, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $b^k \in B_{\ell_\infty}$ με $b_n^k = a_n$ αν $1 \leq n \leq N$ και $b_n^k = \mathrm{sign}(x_{kn})$ αν $n > N$. Παρατηρήστε ότι

$$d(a,b^k) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n^k|}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} < \delta,$$

δηλαδή $b^k \in F_m$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έστω $k \geq m$. Αφού $b^k \in F_m$, έχουμε

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n^k x_{kn}\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n x_{kn} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_{kn}|\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Όμως $x_k \xrightarrow{w} 0$, άρα μπορούμε να βρούμε $m_1 \geq m$ ώστε για κάθε $k \geq m_1$ να ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N} |x_{kn}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες βλέπουμε ότι, για κάθε $k \geq m_1$,

$$\begin{aligned}
\|x_k\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{kn}| = \left|\sum_{n=1}^{N} |x_{kn}| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_{kn}| + \sum_{n=1}^{N} a_n x_{kn} - \sum_{n=1}^{N} a_n x_{kn}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |x_{kn}| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_{kn}| + \sum_{n=1}^{N} a_n x_{kn}\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_n x_{kn}\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου, για να φράξουμε τον τελευταίο όρο, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|a_n| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Το Θεώρημα 5.6.3 δείχνει ότι η (B_{ℓ_1}, w) δεν είναι μετρικοποιήσιμη. Αν ήταν, τότε η w–τοπολογία και η $\|\cdot\|$–τοπολογία θα ταυτίζονταν στον ℓ_1 (εξηγήστε γιατί). Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει σε έναν απειροδιάστατο χώρο. Το αντίστοιχο του Θεωρήματος 5.6.3 δεν ισχύει στον ℓ_p, $1 < p < \infty$.

Ασκήσεις

1. Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach.

(α) Δείξτε ότι $\overline{S_X}^w = B_X$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\| : (X, w) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του X.

2. Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία στον ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Γράφουμε $x_n = (x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$.

(α) Αν $1 < p < \infty$, δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$ αν και μόνο αν (i) υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\|_p \leq M$ για κάθε n, και (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk} = 0$ για κάθε k.

(β) Αν $p = 1$, δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w^*} 0$ αν και μόνο αν (i) υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\|_1 \leq M$ για κάθε n, και (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk} = 0$ για κάθε k.

3. Έστω (f_n) ακολουθία στον $C[0,1]$ με $\|f_n\|_\infty \leq 1$ για κάθε n. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{w} 0$ αν και μόνο αν $f_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

4. Στον ℓ_1 θεωρούμε τη συνήθη βασική ακολουθία $\{e_n\}$. Δείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (y_k) κυρτών συνδυασμών των e_n με $\|y_k\|_1 \to 0$.

5. Έστω (e_n) η συνήθης βάση του ℓ_2. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{e_m + me_n : 1 \le m < n,\, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι το 0 ανήκει στην w–κλειστή θήκη του A αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (a_k) στο A με $a_k \xrightarrow{w} 0$.

6. Έστω X ένας χώρος Banach. Δείξτε ότι ο X^* είναι w^*–*ακολουθιακά πλήρης*: αν $x_n^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(x_n^*(x))$ είναι ακολουθία Cauchy, τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$ ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

7. Σύμφωνα με το θεώρημα Mazur, αν $x_n \xrightarrow{w} 0$ στον χώρο Banach X, τότε υπάρχει ακολουθία (y_k) κυρτών συνδυασμών των x_n με $\|y_k\| \to 0$. Δεν είναι όμως σωστό ότι μπορούμε να πάρουμε $y_k = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k)$ στον παραπάνω ισχυρισμό.

(α) Ένα παράδειγμα είναι το εξής: Στον $L_2(-\pi, \pi)$ θεωρούμε την ακολουθία

$$x_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} e^{ikt}.$$

Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Βρείτε συγκεκριμένη ακολουθία (y_k) κυρτών συνδυασμών των x_n με $\|y_k\|_2 \to 0$. Δείξτε όμως ότι

$$\left\|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right\|_2 \not\to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

(β) Δείξτε ότι αν $f_n \in L_2(-\pi, \pi)$ και $f_n \xrightarrow{w} 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) ώστε

$$\left\|\frac{f_{k_1} + \cdots + f_{k_n}}{n}\right\|_2 \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

8. Έστω X ένας αυτοπαθής χώρος Banach, έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον X και $x_0 \in X$. Ορίζουμε

$$K_n = \overline{\mathrm{co}\{x_m : m \ge n\}}^{\|\cdot\|}.$$

Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} x_0$ αν και μόνο αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x_0\}$.

9. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_k^*) στον X^* με $X^* = \overline{\mathrm{span}}\{x_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^*(x_n) = 0$ για κάθε k. Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$.

10. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy σε έναν χώρο X με νόρμα. Αν $x_n \xrightarrow{w} 0$ τότε $\|x_n\| \to 0$.

11. Έστω $x_n \in c_0$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε

$$\left\|\frac{x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}}{n}\right\| \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

12. Έστω X ένας χώρος Banach και έστω $A \subseteq X^*$. Δείξτε ότι το A διαχωρίζει τα σημεία του X αν και μόνο αν $\overline{\mathrm{span}(A)}^{w^*} = X^*$.

Κεφάλαιο 6

Θεώρημα Krein–Milman

6.1 Ακραία σημεία

Έστω X ένας πραγματικός (για απλότητα) γραμμικός χώρος. Υποθέτουμε ότι K είναι ένα μη κενό κυρτό υποσύνολο του X.

(β) Ένα σημείο $x \in K$ λέγεται **ακραίο σημείο** του K αν για κάθε $y, z \in K$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$(1-\lambda)y + \lambda z \in A \quad \Longrightarrow \quad x = y = z.$$

Δηλαδή, το x δεν είναι εσωτερικό σημείο κάποιου ευθύγραμμου τμήματος $[y, z]$ με άκρα $y \neq z \in K$. Γράφουμε $\mathrm{ex}(K)$ για το σύνολο των ακραίων σημείων του K.

(α) Ένα μη κενό υποσύνολο A του K λέγεται **ακραίο** αν: για κάθε $y, z \in K$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$(1-\lambda)y + \lambda z \in A \quad \Longrightarrow \quad y \in A \text{ και } z \in A.$$

Δηλαδή, αν το A είναι ακραίο και αν, για κάποια $y, z \in K$, κάποιο εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[y, z]$ ανήκει στο A, τότε τα y, z (άσκηση: και όλα τα σημεία του $[y, z]$) ανήκουν στο A. Παρατηρήστε ότι ένα σημείο $x \in K$ είναι ακραίο αν και μόνο αν το $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τον $\ell_2^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ και τα σύνολα

$$B_n = \{x : \|x\|_2 \leq 1\}, \quad D_n = \{x : \|x\|_2 < 1\}, \quad S_n = \{x : \|x\|_2 = 1\}.$$

Παρατηρήστε ότι: $\mathrm{ex}(B_n) = S_n$ και $\mathrm{ex}(D_n) = \emptyset$.

2. Αν P είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο, τότε κάθε ακμή του P είναι ακραίο υποσύνολο του P. Το $\mathrm{ex}(P)$ είναι το σύνολο των κορυφών του P.

3. Σε κάθε χώρο X με νόρμα ισχύει $\mathrm{ex}(B_X) \subseteq S_X = \{x : \|x\| = 1\}$. Υπάρχουν όμως χώροι X για τους οποίους $\mathrm{ex}(B_X) = \emptyset$. Για παράδειγμα, αν $X = L_1[0,1]$,

τότε κάθε $f \in S_X$ γράφεται στη μορφή $f = \frac{g+h}{2}$ όπου $g \neq h$ και $g,h \in S_X$: για το σκοπό αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε $x \in (0,1)$ ώστε $\int_0^x |f|\, d\lambda = 1/2$ και να ορίσουμε $h = 2f\chi_{[0,x]}$, $g = 2f\chi_{(x,1]}$. Τότε, $\int_0^1 |g|\, d\lambda = \int_0^1 |h|\, d\lambda = 1$, δηλαδή $h, g \in S_X$, και $f = \frac{g+h}{2}$. Αφού $h, g \neq f$, έπεται ότι $f \notin \mathrm{ex}(B_X)$. Συνεπώς, $\mathrm{ex}(B_X) = \emptyset$.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι, παρά το Παράδειγμα 3, τα μη κενά κυρτά συμπαγή υποσύνολα οποιουδήποτε τοπικά κυρτού χώρου έχουν ακραία σημεία.

Πρόταση 6.1.1. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω K ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Τότε,* $\mathrm{ex}(K) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}$ όλων των κλειστών, μη κενών, ακραίων υποσυνόλων του K. Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή, αφού $K \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε μερική διάταξη $\leq$ στην $\mathcal{A}$ ως εξής: αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, τότε

$$A_1 \leq A_2 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad A_1 \supseteq A_2.$$

Το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{A}, \leq)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος του Zorn: αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια αλυσίδα στην $\mathcal{A}$, τότε το σύνολο $A_0 := \bigcap_{i\in I} A_i$ είναι άνω φράγμα της στην $\mathcal{A}$. Πράγματι:

(i) Το $A_0 = \bigcap_{i\in I} A_i$ είναι μη κενό. Αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε τα (ανοικτά στο K) σύνολα $K \setminus A_i$, $i \in I$, σχηματίζουν ανοικτή κάλυψη του K. Χρησιμοποιώντας τη συμπάγεια του K περνάμε σε πεπερασμένη υποκάλυψη. Ισοδύναμα, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ ώστε $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} = \emptyset$. Από το γεγονός ότι η $(A_i)_{i\in I}$ είναι αλυσίδα, βλέπουμε τώρα ότι κάποιο από τα A_{i_j}, $1 \leq j \leq n$, είναι κενό. Αυτό είναι άτοπο.

(ii) Προφανώς, $A_j \leq A_0 = \bigcap_{i\in I} A_i$ για κάθε $j \in I$ (ο ορισμός της $\leq$).

(iii) Το σύνολο A_0 είναι ακραίο υποσύνολο του K, δηλαδή $A_0 \in \mathcal{A}$. Πράγματι, έστω $a \in A_0$ και $b, c \in K$, $0 < \lambda < 1$ με $a = (1-\lambda)b + \lambda c$. Έστω $i \in I$. Αφού $a \in A_i$ και κάθε A_i είναι ακραίο υποσύνολο του K, έπεται ότι $b, c \in A_i$. Αφού το $i \in I$ ήταν τυχόν, βλέπουμε τελικά ότι $b, c \in A_0$.

Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει $\leq$–μεγιστικό $A \in \mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι το A είναι μονοσύνολο, δηλαδή υπάρχει $x \in K$ ώστε $A = \{x\}$. Τότε, $x \in \mathrm{ex}(K)$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ με $x \neq y$. Υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \neq f(y)$. Δηλαδή, η f δεν είναι σταθερή στο A.

Θεωρούμε το σύνολο

$$A_1 = \{z \in A : f(z) = \min\{f(w) : w \in A\}\}.$$

Το σύνολο A είναι συμπαγές, άρα το A_1 είναι μη κενό και κλειστό υποσύνολο του K, από τη συνέχεια της f. Επιπλέον, το A_1 είναι ακραίο υποσύνολο του K: Έστω $z_1, z_2 \in K$, $z \in A_1$ και $z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2$ για κάποιο $\lambda \in (0,1)$. Τότε, $z_1, z_2 \in A$, διότι το A είναι ακραίο και $z \in A_1 \subseteq A$. Όμως, $\min_{w\in A} f(w) = f(z) = (1-\lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2)$ και $z_1, z_2 \in A$, άρα

$$f(z_1) = f(z_2) = \min_{w\in A} f(w).$$

Δηλαδή, $z_1, z_2 \in A_1$.

Αφού το A_1 είναι ακραίο υποσύνολο του K και $A_1 \subseteq A$, έχουμε $A \leq A_1$. Όμως το A είναι $\leq$–μεγιστικό, άρα $A = A_1$. Αυτό είναι άτοπο, αφού τότε η f θα ήταν σταθερή στο $A = A_1$.

Δείξαμε ότι κάθε $\leq$–μεγιστικό στοιχείο $A \in \mathcal{A}$ είναι μονοσύνολο. Η $\mathcal{A}$ έχει τουλάχιστον ένα $\leq$–μεγιστικό στοιχείο, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in K$ ώστε το $\{x\}$ να είναι ακραίο υποσύνολο του K. Κάθε τέτοιο x ανήκει στο $\mathrm{ex}(K)$. Άρα, $\mathrm{ex}(K) \neq \emptyset$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι η συμπάγεια του K χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά για να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος του Zorn. Το παράδειγμα 3 δείχνει ότι δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση ότι το K είναι συμπαγές με την ασθενέστερη υπόθεση ότι *το K είναι κλειστό*.

6.2 Θεώρημα Krein–Milman

Η Πρόταση 6.1.1 της προηγούμενης Παραγράφου μας λέει ότι κάθε μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο K ενός τοπικά κυρτού χώρου έχει ακραία σημεία. Το θεώρημα Krein–Milman ισχυρίζεται ότι το K έχει «πολλά» ακραία σημεία:

Θεώρημα 6.2.1 (Krein–Milman). *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω K ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Τότε, $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(K))}$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in K \setminus \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(K))}$. Τότε, τα σύνολα $\{x\}$ και $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(K))}$ διαχωρίζονται γνήσια. Υπάρχουν συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$(*) \qquad \sup\{f(y) : y \in \mathrm{ex}(K)\} = \sup\{f(z) : z \in \mathrm{co}(\mathrm{ex}(K))\} < \lambda < f(x).$$

Ορίζουμε

$$K_1 = \{z \in K : f(z) = \max_{w \in K} f(w)\}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Το K_1 είναι μη κενό, συμπαγές, κυρτό (από τη συνέχεια και τη γραμμικότητα της f).

(ii) $K_1 \cap \mathrm{ex}(K) = \emptyset$ (από την $(*)$).

(iii) Κάθε ακραίο σημείο του K_1 είναι ακραίο σημείο του K (χρησιμοποιήστε επιχείρημα ανάλογο με εκείνο της απόδειξης της Πρότασης 6.1.1).

Από το (i) και την Πρόταση 6.1.1 έχουμε $\mathrm{ex}(K_1) \neq \emptyset$. Όμως, $\mathrm{ex}(K_1) \subseteq \mathrm{ex}(K) \cap K_1$ λόγω του (iii). Από το (ii) οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Στην επόμενη Παράγραφο θα δούμε κάποιες εφαρμογές του θεωρήματος Krein–Milman. Δίνουμε εδώ ένα πρώτο παράδειγμα: σύμφωνα με το θεώρημα Alaoglu, αν X είναι ένας χώρος με νόρμα τότε η B_{X^*} είναι ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του τοπικά κυρτού χώρου (X^*, w^*). Έτσι, έχουμε το εξής.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τότε, $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_{X^*}))}^{w^*}$. Ειδικότερα,*

$$\mathrm{ex}(B_{X^*}) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, η μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου X^* οποιουδήποτε χώρου με νόρμα X πρέπει να έχει (αρκετά) ακραία σημεία.

Παραδείγματα

(α) Η μοναδιαία μπάλα του $L_1[0,1]$ δεν έχει ακραία σημεία (δείτε το Παράδειγμα 3 στην προηγούμενη παράγραφο). Σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.2, ο $L_1[0,1]$ δεν μπορεί να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό χώρο κάποιου χώρου με νόρμα.
(β) Το ίδιο ισχύει για τον c_0: έστω $x \in B_{c_0}$, δηλαδή $\|x\| = \sup_n |x_n| \leq 1$. Αφού $x_n \to 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_m| < \frac{1}{2}$. Ορίζουμε $y, z \in c_0$ με $y_n = z_n = x_n$ αν $n \neq m$ και $y_m = x_m + \frac{1}{2}$, $z_m = x_m - \frac{1}{2}$. Τότε, $y, z \in B_{c_0}$, $y, z \neq x$ και $x = \frac{y+z}{2}$. Άρα, $x \notin \mathrm{ex}(B_{c_0})$. Δηλαδή, η μοναδιαία μπάλα του c_0 δεν έχει ακραία σημεία.

Τα επόμενα δύο θεωρήματα χρησιμοποιούνται συχνά όταν εφαρμόζουμε το θεώρημα Krein–Milman.

Θεώρημα 6.2.3. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος, K ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του X και $F \subseteq K$ με την ιδιότητα $K = \overline{\mathrm{co}(F)}$. Τότε,*

$$\mathrm{ex}(K) \subseteq \overline{F}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το F είναι κλειστό. Ας υποθέσουμε ότι x_0 είναι ένα ακραίο σημείο του K που δεν ανήκει στο F. Μπορούμε να βρούμε ανοικτή, κυρτή και συμμετρική περιοχή U του 0 ώστε $(x_0 + U) \cap (F + U) = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $x_0 \notin \overline{F + U}$.

Το F είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in F$ ώστε $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (y_j + U)$. Για $j = 1, \ldots, n$ ορίζουμε $K_j = \overline{\mathrm{co}(F \cap (y_j + U))}$. Το σύνολο $\mathrm{co}(F \cap (y_j + U))$ περιέχεται στο κυρτό σύνολο $y_j + U$, άρα

$$K_j \subseteq \overline{y_j + U} = y_j + \overline{U}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ισχυρισμός. $K = \mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$.
Απόδειξη. Είναι φανερό ότι $K_j \subseteq \overline{\mathrm{co}(F)} = K$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και το K είναι κυρτό, επομένως $\mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n) \subseteq K$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρήστε ότι $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (F \cap (y_j + U))$, άρα $F \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_n$, απ' όπου έπεται ότι

$$K = \overline{\mathrm{co}(F)} \subseteq \overline{\mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)}.$$

Όμως, το σύνολο $\mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$ είναι συμπαγές: είναι η εικόνα του συμπαγούς $C = K_1 \times \cdots \times K_n \times \{\overline{t} = (t_j)_{j \leq n} : 0 \leq t_j \leq 1, \sum_{j=1}^{n} t_j = 1\}$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $\Phi(x_1, \ldots, x_n, \overline{t}) = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j$. Άρα,

$$K \subseteq \overline{\mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)} = \mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n).$$

Από τον ισχυρισμό έπεται ότι το $x_0 \in K$ γράφεται στη μορφή $x_0 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, όπου $x_j \in K_j$, $a_j \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$. Όμως, το x_0 είναι ακραίο σημείο του K, συνεπώς $x_0 = x_j$ για κάποιο $j \leq n$ (εξηγήστε γιατί). Τότε,

$$x_0 \in K_j \subseteq \overline{y_j + U} \subseteq \overline{F + U},$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Σημείωση. Δεν είναι γενικά σωστό ότι το σύνολο $\mathrm{ex}(K)$ των ακραίων σημείων ενός συμπαγούς κυρτού συνόλου είναι κλειστό. Ένα απλό παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3$ δίνει ο διπλός κώνος $K = \mathrm{co}(\{A, B\} \cup S)$, όπου $A = (0,0,1)$, $B = (0,0,-1)$ και $S = \{(x,y,0) : (x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 \leq 1/4\}$. Το σύνολο των ακραίων σημείων του K είναι το $\{A, B\} \cup (S \setminus \{0\})$ (άσκηση) το οποίο δεν είναι κλειστό.

Θεώρημα 6.2.4. *Έστω X, Y δύο τοπικά κυρτοί χώροι, K μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X και $T : X \to Y$ συνεχής γραμμική απεικόνιση. Τότε, το $T(K)$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του Y και για κάθε $y \in \mathrm{ex}(T(K))$ υπάρχει $x \in \mathrm{ex}(K)$ ώστε $T(x) = y$.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής. Έστω $y \in \mathrm{ex}(T(K))$. Το σύνολο $K_y = \{x \in K : T(x) = y\}$ είναι κλειστό (άρα, συμπαγές) και κυρτό. Υπάρχει λοιπόν x_0 το οποίο είναι ακραίο σημείο του K_y. Τότε, $x_0 \in \mathrm{ex}(K)$: αν $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, όπου $0 < \lambda < 1$ και $x_1, x_2 \in K$, τότε $y = T(x_0) = (1-\lambda)T(x_1) + \lambda T(x_2)$, και αυτό σημαίνει ότι $T(x_1) = T(x_2) = y$, διότι $y \in \mathrm{ex}(T(K))$. Άρα, $x_1, x_2 \in K_y$ και, αφού $x_0 \in \mathrm{ex}(K_y)$, έπεται ότι $x_0 = x_1 = x_2$. □

Σημείωση. Δεν ισχύει κάποιου είδους αντίστροφο. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την προβολή $T(x, y) = x$ από το μοναδιαίο δίσκο στο $[-1, 1]$.

6.3 Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $C(K)$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο K, με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $I : C(K) \to \mathbb{R}$ λέγεται *θετικό* αν $I(f) \geq 0$ για κάθε $f \in C(K)$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in K$.

Θεώρημα 6.3.1 (Riesz). *Έστω $I : C(K) \to \mathbb{R}$ φραγμένο θετικό γραμμικό συναρτησοειδές. Υπάρχει μοναδικό κανονικό Borel μέτρο μ στο K ώστε*

$$(*) \qquad I(f) = \int_K f \, d\mu$$

για κάθε $f \in C(K)$.

Σημείωση. Ένα μέτρο μ στην $\mathcal{B}(K)$ λέγεται *κανονικό* αν $\mu(K) < \infty$ και για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό και } A \subseteq U\}$,

(ii) $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \text{ συμπαγές και } C \subseteq A\}$.

Αν μ είναι ένα προσημασμένο Borel μέτρο στο K, τότε το μ λέγεται κανονικό αν τα μ^+ και μ^- είναι κανονικά. Ο χώρος $\mathcal{M}(K)$ των προσημασμένων κανονικών Borel μέτρων είναι γραμμικός χώρος. Η $\|\mu\| = |\mu|(K) = \mu^+(K) + \mu^-(K)$ είναι νόρμα στον $\mathcal{M}(K)$ και ο $(\mathcal{M}(K), \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1. Δείχνουμε πρώτα τη μοναδικότητα του μ. Έστω ν ένα άλλο κανονικό Borel μέτρο στο K ώστε

$$(*) \qquad I(f) = \int_K f\,d\nu = \int_K f\,d\mu$$

για κάθε $f \in C(K)$. Έστω C συμπαγές υποσύνολο του K και U ανοικτό υποσύνολο του K με $K \subseteq U$. Από το Λήμμα του Urysohn υπάρχει $f \in C(K)$ με $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 1$ στο C και $\mathrm{supp}(f) \subset U$. Τότε,

$$\mu(C) = \int_K \chi_C d\mu \leq \int_K f\,d\mu = \int_K f\,d\nu \leq \int_K \chi_U d\nu = \nu(U).$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλα τα $U \supseteq C$ και χρησιμοποιώντας την κανονικότητα του ν, συμπεραίνουμε ότι $\mu(C) \leq \nu(C)$ για κάθε C. Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα $C \subseteq U$ και χρησιμοποιώντας την κανονικότητα του μ, συμπεραίνουμε ότι $\mu(U) \leq \nu(U)$ για κάθε U. Λόγω συμμετρίας, έχουμε $\mu(C) = \nu(C)$ και $\mu(U) = \nu(U)$ για κάθε συμπαγές C και κάθε ανοικτό U. Από την κανονικότητα των μ και ν έπεται ότι $\mu \equiv \nu$.

Δείχνουμε τώρα την ύπαρξη: για κάθε $U \subseteq K$ ανοικτό, ορίζουμε

$$\mu(U) := \sup\{I(f) : f \prec U\},$$

όπου $f \prec U$ σημαίνει ότι $0 \leq f \leq 1$ και $\mathrm{supp}(f) \subset U$. Αφού το I είναι θετικό συναρτησοειδές, από τον ορισμό είναι προφανές ότι $\mu(U) \geq 0$. Επίσης, αν U_1, U_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του K και $U_1 \subseteq U_2$ τότε $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$. Από την τελευταία παρατήρηση έπεται ότι αν, για κάθε $A \subseteq K$, ορίσουμε

$$(1) \qquad \mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό και } A \subseteq U\},$$

έχουμε $\mu^*(U) = \mu(U)$ για κάθε ανοικτό $U \subseteq K$. Επίσης, αν $f \prec U$ έχουμε $I(f) \leq \|I\| \cdot \|f\|_\infty \leq \|I\|$, άρα $\mu^*(U) \leq \|I\|$. Έπεται ότι $\mu^*(A) \leq \|I\|$ για κάθε $A \subseteq K$.

1. Δείχνουμε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο. Το μ^* είναι μονότονο: αν $A, B \in \mathcal{B}(K)$ και $A \subseteq B$, τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Αυτό είναι φανερό από την (1). Είναι επίσης φανερό ότι $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Αν (A_i) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του K, τότε

$$(2) \qquad \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\mu^*(U_1 \cup U_2) \leq \mu^*(U_1) + \mu^*(U_2)$ αν τα U_1, U_2 είναι ανοικτά. Έστω $g \prec U_1 \cup U_2$. Από το Λήμμα 1.4.3 υπάρχουν $h_i \prec U_i$, $i = 1, 2$ ώστε $h_1 + h_2 \equiv 1$ στο $\mathrm{supp}(g)$. Τότε, $g = gh_1 + gh_2$, άρα $I(g) = I(gh_1) + I(gh_2)$. Όμως, $gh_i \prec U_i$, άρα $I(g) \leq \mu^*(U_1) + \mu^*(U_2)$. Έπεται ότι

$$\mu^*(U_1 \cup U_2) = \sup\{I(g) : g \prec U_1 \cup U_2\} \leq \mu^*(U_1) + \mu^*(U_2).$$

Επαγωγικά, αν $U_1, \ldots, U_n$ είναι ανοικτά υποσύνολα του K έχουμε $\mu^*(U_1 \cup \cdots \cup U_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(U_i)$.

Έστω τώρα (A_i) μια ακολουθία υποσυνόλων του K. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i \supseteq A_i$ με $\mu^*(U_i) < \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Τότε,

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right).$$

Έστω $f \prec \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Λόγω της συμπάγειας του $\mathrm{supp}(f)$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f \prec \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Τότε,

$$I(f) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon.$$

Η f ήταν τυχούσα, άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon,$$

και έπεται το ζητούμενο.

Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή, ορίζεται η σ–άλγεβρα των μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του K και ο περιορισμός του μ^* σε αυτήν είναι μέτρο.

2. Δείχνουμε ότι κάθε ανοικτό $U \subseteq K$ είναι μ^*–μετρήσιμο. Έστω $A \subseteq K$. Βρίσκουμε ανοικτό $V \supseteq A$ με $\mu^*(V) = \mu(V) < \mu^*(A) + \varepsilon$ και $f \prec U \cap V$ με $I(f) > \mu(U \cap V) - \varepsilon$. Το $V \setminus \mathrm{supp}(f)$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $g \prec V \setminus \mathrm{supp}(f)$ ώστε $I(g) > \mu(V \setminus \mathrm{supp}(f)) - \varepsilon$. Τότε, $f + g \prec V$, άρα

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \varepsilon &> \mu(V) \geq I(f+g) = I(f) + I(g) \\ &> \mu(U \cap V) + \mu(V \setminus \mathrm{supp}(f)) - 2\varepsilon \\ &\geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U)$, δηλαδή το U είναι μ^*–μετρήσιμο. Άρα, ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{B}(K)$ είναι μέτρο.

3. Αν $C \subseteq K$ συμπαγές, τότε $\mu(C) = \inf\{I(f) : C \prec f\}$, όπου $C \prec f$ σημαίνει ότι $0 \leq f \leq 1$ και $f \equiv 1$ στο C.

Απόδειξη. Έστω $C \prec f$. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $U = \{x \in K : f(x) > 1 - \varepsilon\} \supseteq C$, όπου $0 < \varepsilon < 1$. Αν $g \prec U$, τότε $g \leq \frac{1}{1-\varepsilon} f$ στο K, άρα $I(g) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} I(f)$. Άρα, $\mu(C) \leq \mu(U) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} I(f)$. Έπεται ότι $\mu(C) \leq I(f)$, δηλαδή

$$\mu(C) \leq \inf\{I(f) : C \prec f\}.$$

Αντίστροφα, για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτό $U \supseteq C$ με $\mu(U) < \mu(C) + \varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε $g \in C(K)$ με $C \prec g \prec U$. Τότε,

$$I(g) \leq \mu(U) < \mu(C) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\inf\{I(f) : C \prec f\} \leq \mu(C).$$

4. Το μ είναι κανονικό.

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε αυτομάτως την πρώτη ιδιότητα του κανονικού μέτρου: για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$ ισχύει

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό και } A \subseteq U\}.$$

Για την δεύτερη ιδιότητα, θεωρούμε τυχόν $A \in \mathcal{B}(K)$ και $\varepsilon > 0$, και βρίσκουμε ανοικτό $U \supseteq A$ ώστε $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$. Υπάρχει $g \prec U$ με $I(g) > \mu(U) - \varepsilon$. Θέτουμε $C = \mathrm{supp}(g) \subseteq U$. Αν $C \prec f$, τότε $g \leq f$ άρα $I(g) \leq I(f)$. Συνεπώς, $\mu(C) = \inf\{I(f) : C \prec f\} \geq I(g)$. Δηλαδή, υπάρχει συμπαγές $C \subseteq U$ με $\mu(C) > \mu(U) - \varepsilon$. Αφού $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$, υπάρχει ανοικτό $V \supseteq U \setminus A$ με $\mu(V) < 2\varepsilon$. Τότε, το $F = C \setminus V$ είναι συμπαγές υποσύνολο του A και $A \setminus F \subseteq (U \setminus C) \cup V$, άρα $\mu(A) - \mu(F) \leq \mu(U \setminus C) + \mu(V) < 3\varepsilon$. Έπεται ότι

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ συμπαγές και } F \subseteq A\}.$$

5. Ισχύει $I(f) = \int_K f\, d\mu$ για κάθε $f \in C(K)$.

Απόδειξη. Μπορούμε (θεωρώντας τις f^+ και f^-) να υποθέσουμε ότι $f \geq 0$, και (πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη σταθερά) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq f \leq 1$. Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και, για $0 \leq k \leq N$, ορίζουμε $B_k = \{x \in K : f(x) \geq k/N\}$. Έχουμε $B_0 = K$ και κάθε B_k είναι συμπαγές σύνολο. Για $s = 0, 1, \ldots, N-1$ ορίζουμε

$$f_s = \min\left\{\max\left\{f, \frac{s}{N}\right\}, \frac{s+1}{N}\right\} - \frac{s}{N}.$$

Κάθε f_s είναι συνεχής στο K και $\frac{1}{N}\chi_{B_{s+1}} \leq f_s \leq \frac{1}{N}\chi_{B_s}$. Παρατηρήστε ότι $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1}$. Έπεται ότι

$$\frac{1}{N}(\mu(B_1) + \cdots + \mu(B_N)) \leq \int_K f\, d\mu \leq \frac{1}{N}(\mu(B_0) + \cdots + \mu(B_{N-1})).$$

Για κάθε $0 \leq s \leq N-1$ έχουμε $\chi_{B_{s+1}} \leq Nf_s$, άρα $\mu(B_{s+1}) \leq I(Nf_s) = NI(f_s)$. Επίσης, $Nf_s \leq \chi_{B_s}$, άρα $Nf_s \prec U$ για κάθε ανοικτό $U \supseteq B_s$, το οποίο μας δίνει $NI(f_s) \leq \mu(U)$ για κάθε ανοικτό $U \supseteq B_s$. Έπεται ότι $\mu(B_s) = \mu^*(B_s) \geq NI(f_s)$. Συνοψίζοντας,

$$\frac{\mu(B_{s+1})}{N} \leq I(f_s) \leq \frac{\mu(B_s)}{N},$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{N}(\mu(B_1) + \cdots + \mu(B_N)) \leq I(f) \leq \frac{1}{N}(\mu(B_0) + \cdots + \mu(B_{N-1})).$$

Δηλαδή,

$$\left|\int_K f\, d\mu - I(f)\right| \leq \frac{\mu(B_0) - \mu(B_N)}{N} \leq \frac{\mu(K)}{N},$$

και αφού το N ήταν τυχόν, $I(f) = \int_K f\, d\mu$. □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $I : C(K) \to \mathbb{R}$ αναπαρίσταται από μοναδικό προσημασμένο κανονικό Borel μέτρο στο K.

Θεώρημα 6.3.2. *Έστω $I : C(K) \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Υπάρχει μοναδικό προσημασμένο κανονικό Borel μέτρο μ στο K ώστε*

$$(*) \qquad I(f) = \int_K f\, d\mu$$

για κάθε $f \in C(K)$.

Απόδειξη. Αν $f \in C(K)$ με $f \geq 0$, ορίζουμε

$$I^+(f) = \sup\{I(g) : g \in C(K), 0 \leq g \leq f \text{ στο } K\}.$$

Αν τώρα $f \in C(K)$, γράφουμε την f στη μορφή $f = f^+ - f^-$ και ορίζουμε

$$I^+(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-).$$

Τέλος, ορίζουμε

$$I^-(f) = I^+(f) - I(f).$$

Δείξτε ότι τα I^+, I^- είναι φραγμένα θετικά γραμμικά συναρτησοειδή στον $C(K)$. Από το Θεώρημα 6.3.1, υπάρχουν μοναδικά κανονικά Borel μέτρα μ^+, μ^- στο K ώστε

$$I^+(f) = \int_K f\, d\mu^+ \ \text{ και } \ I^-(f) = \int_K f\, d\mu^-.$$

Το I αναπαρίσταται από το προσημασμένο μέτρο $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. □

Πρόταση 6.3.3. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(K)$. Ορίζουμε $I_\mu : C(K) \to \mathbb{R}$ με $I_\mu(f) = \int_K f\, d\mu$. Τότε, το I_μ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|I\| = \|\mu\|$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του I_μ είναι φανερή. Επίσης,

$$|I_\mu(f)| \leq \int_K |f|\, d|\mu| \leq \|\mu\| \cdot \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in C(K)$, άρα $\|I_\mu\| \leq \|\mu\|$.

Για την αντίστροφη ανισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι υπάρχει μ–μετρήσιμη συνάρτηση $h : K \to \mathbb{R}$ με $|h(x)| = 1$ για κάθε $x \in K$, η οποία ικανοποιεί την

$$\mu(A) = \int_A hd|\mu|$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε (άσκηση) $g \in C(K)$ με $|g| \leq 1$ και

$$\int_K |h - g|\, d|\mu| < \varepsilon.$$

Τότε,

$$\|\mu\| = |\mu|(K) = \int_K h^2 d|\mu| = \int_K h\, d\mu < |I_\mu(g)| + \varepsilon.$$

Αφού $\|g\|_\infty \leq 1$ και το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|\mu\| \leq \sup\{|I_\mu(g)| : \|g\|_\infty \leq 1\} = \|I_\mu\|$. □

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz:

Θεώρημα 6.3.4. *Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε, ο $\mathcal{M}(K)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $[C(K)]^*$.*

Απόδειξη. Από τα προηγούμενα θεωρήματα, η $\Phi : \mathcal{M}(K) \to [C(K)]^*$ με $\mu \mapsto I_\mu$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. □

6.4 Εφαρμογές

6.4α΄ Θεώρημα Stone–Weierstrass

Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $C(K)$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο K, με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Ένα υποσύνολο $\mathcal{A}$ του $C(K)$ λέγεται *υποάλγεβρα* του $C(K)$ αν για κάθε $f, g \in \mathcal{A}$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $tf, f+g, f\cdot g \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 6.4.1 (Stone–Weierstrass). *Έστω $\mathcal{A}$ μια υποάλγεβρα του $C(K)$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Η σταθερή συνάρτηση $1 \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του K: αν $x \neq y$ στο K, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ ώστε $f(x) \neq f(y)$.*

Τότε, $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι: αν $\mu \in (C(K), \|\cdot\|_\infty)^*$ και $\int_K f\,d\mu = 0$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$, τότε $\mu \equiv 0$.

Θεωρούμε λοιπόν τον υπόχωρο $N(\mathcal{A}) = \{\mu : \forall f \in \mathcal{A},\ \int_K f\,d\mu = 0\}$ και τη μοναδιαία του μπάλα B. Το B είναι w^*–κλειστό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $(C(K), \|\cdot\|_\infty)^*$, και σύμφωνα με το θεώρημα Alaoglu είναι w^*–συμπαγές. Από το θεώρημα Krein–Milman έπεται ότι $\mathrm{ex}(B) \neq \emptyset$. Ας υποθέσουμε ότι $N(\mathcal{A}) \neq \{0\}$.

Έστω $\mu \in \mathrm{ex}(B)$. Έχουμε $\mu \neq 0$ (εξηγήστε γιατί) και αν $C = K \setminus \bigcup\{V : V \text{ ανοικτό και } |\mu|(V) = 0\}$ είναι ο φορέας του μ, τότε

(i) $|\mu|(C) = 1 = |\mu|(K)$, άρα $C \neq \emptyset$,

(ii) $\int_K f\,d\mu = \int_C f\,d\mu$ για κάθε $f \in C(K)$.

Έστω $x_0 \in C$. Θα δείξουμε ότι $C = \{x_0\}$: Θεωρούμε τυχόν $x \in K$ με $x \neq x_0$. Υπάρχει $f_1 \in \mathcal{A}$ που διαχωρίζει τα x_0, x, δηλαδή $f_1(x_0) \neq f_1(x) =: b$. Η σταθερή συνάρτηση $b \in \mathcal{A}$, άρα η συνάρτηση $f_2 = f_1 - b \in \mathcal{A}$ και $f_2(x_0) \neq 0 = f_2(x)$. Επίσης, η συνάρτηση $f_3 = f_2^2 \in \mathcal{A}$ και ικανοποιεί τις $f_3 \geq 0$, $f_3(x) = 0$, $f_3(x_0) > 0$. Ορίζουμε

$$f := \frac{f_3}{1 + \|f_3\|_\infty}.$$

Τότε, $f \in \mathcal{A}$, $0 \leq f < 1$ στο K και $f(x_0) > 0$, $f(x) = 0$.

Για κάθε $g \in \mathcal{A}$ έχουμε $gf \in \mathcal{A}$ και $g(1-f) \in \mathcal{A}$, άρα

$$\int gf\,d\mu = 0 \quad \text{και} \quad \int g(1-f)\,d\mu = 0.$$

Δηλαδή, τα μέτρα μ_1, μ_2 με $d\mu_1 = f\,d\mu$ και $d\mu_2 = (1-f)\,d\mu$ ανήκουν στον $N(\mathcal{A})$. Επίσης, $|\mu_1|(K) = \int_K f\,d|\mu|$ και $|\mu_2|(K) = \int_K (1-f)\,d|\mu|$, διότι $0 \leq f < 1$ στο K.

Ισχυρισμός. $|\mu_1|(K) = \alpha \in (0,1)$.

Απόδειξη. Αφού $f(x_0) > 0$, υπάρχουν περιοχή U του x_0 και $\varepsilon > 0$ ώστε $f(y) > \varepsilon$ για κάθε $y \in U$. Έχουμε $U \cap C \neq \emptyset$ διότι $x_0 \in U \cap C$, άρα

$$\alpha = \int_K f\,d|\mu| \geq \int_U f\,d|\mu| \geq \varepsilon|\mu|(U) > 0.$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την $f(x_0) < 1$, βλέπουμε ότι

$$\alpha = \int_K f\,d|\mu| < 1.$$

Επίσης,

$$|\mu_2|(K) = \int_K (1-f)\,d|\mu| = |\mu|(K) - \alpha = 1 - \alpha.$$

Γράφουμε

$$\mu = \alpha\left(\frac{\mu_1}{|\mu_1|(K)}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\mu_2}{|\mu_2|(K)}\right) = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2.$$

Αφού $\mu_1, \mu_2 \in N(\mathcal{A})$, έχουμε $\nu_1, \nu_2 \in B$. Όμως, $\mu \in \mathrm{ex}(B)$. Συνεπώς, $\mu = \nu_1 = \nu_2$. Δηλαδή,

$$\int_K h\,d\mu = \int_K \frac{hf}{\alpha}\,d\mu$$

για κάθε $h \in C(K)$. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο, πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε $f = \alpha$ μ–σχεδόν παντού. Όμως η f είναι συνεχής, άρα $f \equiv \alpha$ στο C (εξηγήστε γιατί). Αφού $f(x) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $x \notin C$. Το $x \neq x_0$ ήταν τυχόν, άρα $C = \{x_0\}$.

Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι $|\mu|(K) = 1$ και $\mu(\{x_0\}) = \pm 1$. Όμως, $1 \in \mathcal{A}$ και $\mu \in N(\mathcal{A})$, άρα

$$0 = \int_K 1\,d\mu = 1 \cdot \mu(\{x_0\}) = \pm 1,$$

το οποίο είναι άτοπο. Η υπόθεσή μας ήταν ότι $N(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, άρα $N(\mathcal{A}) = \{0\}$ και αυτό δείχνει ότι $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K)$. $\square$

Σημείωση. Το Θεώρημα 6.4.1 εφαρμόζεται στις εξής περιπτώσεις:

(α) $K = [0,1]$, $\mathcal{A} =$ ο χώρος των πολυωνύμων στο $[0,1]$: κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα.

(β) $K = [-\pi, \pi]$, $\mathcal{A} =$ ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο $[-\pi,\pi]$: η $\mathcal{A}$ είναι υποάλγεβρα του $C[-\pi,\pi]$ (παρατηρήστε ότι το γινόμενο δύο τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και ότι το $\{\cos x, \sin x\}$ διαχωρίζει τα σημεία του $[-\pi,\pi]$). Άρα, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

6.4β′ Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις

Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος, K ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του X και μ ένα κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στο K. Λέμε ότι το $x_0 \in X$ **αναπαρίσταται** από το μ (είναι το **κέντρο βάρους** του μ) αν για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_K f(x)\, d\mu(x) = f(x_0).$$

Το πρώτο μας θεώρημα εξασφαλίζει (υπό προϋποθέσεις) την ύπαρξη κέντρου βάρους για το μ.

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω F μη κενό κλειστό υποσύνολο του τοπικά κυρτού χώρου X ώστε το $K = \overline{\mathrm{co}(F)}$ να είναι συμπαγές. Τότε, κάθε κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στο F έχει μοναδικό κέντρο βάρους που ανήκει στο K.*

Απόδειξη. Το $I(f,\mu) := \int_F f(x)\, d\mu(x)$ ορίζεται καλά για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$. Για κάθε τέτοια f ορίζουμε το κλειστό υπερεπίπεδο

$$E_f = \{y \in X :\ f(y) = I(f,\mu)\}.$$

Αν δείξουμε ότι

$$(*) \qquad K \cap \left(\bigcap_f E_f \right) \neq \emptyset,$$

τότε κάθε σημείο αυτού του συνόλου είναι κέντρο βάρους του μ (εξηγήστε γιατί). Είναι φανερό ότι αν υπήρχαν δύο τέτοια σημεία $x_1 \neq x_2$, τότε για κάθε $f \in X^*$ θα είχαμε

$$f(x_1) = f(x_2) = \int_F f(x)\, d\mu(x),$$

το οποίο είναι άτοπο αφού ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X σε κάθε τοπικά κυρτό χώρο.

Αποδεικνύουμε λοιπόν την $(*)$: αφού το K είναι συμπαγές, αρκεί να δείξουμε ότι αν $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ τότε $K \cap E_{f_1} \cap \cdots \cap E_{f_n} \neq \emptyset$ (εξηγήστε γιατί).

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : X \to \mathbb{R}^n$ με $T(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$w := \left(\int_F f_1 d\mu, \ldots, \int_F f_n d\mu \right) \in T(K).$$

Έστω ότι $w \notin T(K)$. Αφού το $T(K)$ είναι κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε

$$(**) \qquad \max\{h(T(y)) : y \in K\} < h(w).$$

Υπάρχουν $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε $h(x) = b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$ για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε, η $(**)$ γράφεται

$$\max_{y \in K} \sum_{j=1}^n b_j f_j(y) < \sum_{j=1}^n b_j \int_F f_j(x)\, d\mu(x).$$

Αν θέσουμε $m := \sum_{j=1}^n b_j f_j$, από την $F \subseteq K$ και την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\max_{y \in f} m(y) < \int_F m(x)\, d\mu(x).$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού το μ είναι μέτρο πιθανότητας. $\square$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι *κάθε* σημείο της $\overline{\mathrm{co}(F)}$ αναπαρίσταται από τουλάχιστον ένα μέτρο πιθανότητας στο F.

Θεώρημα 6.4.3. *Έστω F μη κενό συμπαγές υποσύνολο του τοπικά κυρτού χώρου X και έστω $x \in X$. Τότε, $x \in \overline{\mathrm{co}(F)}$ αν και μόνο αν υπάρχει κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας μ στο F που έχει κέντρο βάρους το x.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο F και έστω x το κέντρο βάρους του. Αν $x \notin \overline{\mathrm{co}(F)}$, υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\max_{x \in F} f(y) < \lambda < f(x).$$

Αφού το x είναι το κέντρο βάρους του μ,

$$\lambda < f(x) = \int_F f(y)\, d\mu(y) \leq \max_{y \in F} f(y) < \lambda,$$

το οποίο είναι άτοπο.

($\Longrightarrow$) Έστω $x \in \overline{\mathrm{co}(F)}$. Υπάρχει δίκτυο από κυρτούς συνδυασμούς

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} y_{ij}, \quad y_{ij} \in F,\ i \in I$$

ώστε $x_i \to x$. Για κάθε $i \in I$ θεωρούμε το μέτρο $\mu_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\delta_{y_{ij}}$ που δίνει μάζα a_{ij} σε κάθε y_{ij}. Κάθε μ_i είναι κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στο F. Αφού η μοναδιαία μπάλα B του $(C(F), \|\cdot\|_\infty)^*$ είναι w^*–συμπαγής και $\mu_i \in B$, υπάρχει υποδίκτυο μ_ℓ, $\ell \in L$, με $\mu_\ell \xrightarrow{w^*} \mu \in B$. Το μ είναι μέτρο πιθανότητας στο F και έχει κέντρο βάρους το x: για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_\ell f(x_\ell) = \lim_\ell \sum_{j=1}^{n_\ell} a_{\ell j} f(y_{\ell j}) \\ &= \lim_\ell \int_F f(y)\, d\mu_\ell(y) = \int_F f(y)\, d\mu(y). \qquad \square \end{aligned}$$

Αν το F είναι ήδη συμπαγές *και κυρτό*, τότε κάθε $x \in \overline{\mathrm{co}(F)} = F$ αναπαρίσταται από το μέτρο Dirac δ_x. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το δ_x είναι το μοναδικό μέτρο που έχει κέντρο βάρους το x αν και μόνο αν το x είναι ακραίο σημείο του F.

Θεώρημα 6.4.4 (Bauer). *Έστω F ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του τοπικά κυρτού χώρου X και έστω $x \in F$. Τότε, $x \in \mathrm{ex}(F)$ αν και μόνο αν το δ_x είναι το μοναδικό κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στο F που έχει κέντρο βάρους το x.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω ότι $x \notin \mathrm{ex}(F)$. Υπάρχουν $y \neq z \in F$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x = (1-\lambda)y + \lambda z$. Τότε, το x είναι κέντρο βάρους του $(1-\lambda)\delta_y + \lambda\delta_z \neq \delta_x$.

($\Longrightarrow$) Έστω $x \in \mathrm{ex}(F)$ και έστω μ κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας που έχει κέντρο βάρους το x. Θα δείξουμε ότι $\mu(F \setminus \{x\}) = 0$ δείχνοντας ότι $\mu(C) = 0$ για κάθε συμπαγές $C \subseteq F \setminus \{x\}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοιο C με $\mu(C) > 0$. Από τη συμπάγεια του C συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $y \in C$ με την ιδιότητα: $\mu(C \cap U) > 0$ για κάθε περιοχή U του y (εξηγήστε γιατί). Αφού $x \neq y$, μπορούμε να βρούμε κυρτή περιοχή U του y ώστε $x \notin \overline{U} \cap F$ (εξηγήστε γίατί). Το $\overline{U} \cap F$ ικανοποιεί την

$$0 < \mu(\overline{U} \cap F) < 1.$$

Η δεξιά ανισότητα ισχύει γιατί, αν είχαμε $\mu(\overline{U} \cap F) = 1$ τότε το κέντρο βάρους του μ θα ανήκε στο συμπαγές κυρτό $\overline{U} \cap F$ από το Θεώρημα 6.4.2, το οποίο δεν μπορεί να συμβεί αφού $x \notin \overline{U} \cap F$.

Ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας μ_1, μ_2 στο F με

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B \cap \overline{U} \cap F)}{\mu(\overline{U} \cap F)}, \quad \mu_2(B) = \frac{\mu(B \setminus \overline{U} \cap F)}{1 - \mu(\overline{U} \cap F)}, \quad B \text{ Borel } \subseteq F.$$

Έστω $x_1, x_2 \in F$ τα κέντρα βάρους των μ_1, μ_2. Έχουμε $x_1 \in \overline{U} \cap F$, άρα $x_1 \neq x$. Όμως,

$$\mu = \mu(\overline{U} \cap F) \cdot \mu_1 + (1 - \mu(\overline{U} \cap F)) \cdot \mu_2,$$

άρα (εξηγήστε γιατί)

$$x = \mu(\overline{U} \cap F) \cdot x_1 + (1 - \mu(\overline{U} \cap F)) \cdot x_2,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $x \in \mathrm{ex}(F)$. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 6.4.3 με το θεώρημα Krein–Milman παίρνουμε το εξής χρήσιμο θεώρημα *ολοκληρωτικής αναπαράστασης*:

Θεώρημα 6.4.5. *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω K ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Για κάθε $x \in K$ υπάρχει κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας μ_x στο $\overline{\mathrm{ex}(K)}$ ώστε: για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \int_{\overline{\mathrm{ex}(K)}} f(y)\, d\mu_x(y).$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα Krein–Milman έχουμε $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(K))}$, οπότε εφαρμόζεται το Θεώρημα 6.4.3. □

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τον χώρο $X = L_\infty[0,1]$. Δείξτε ότι $f \in \mathrm{ex}(B_X)$ αν και μόνο αν $|f(t)| = 1$ λ–σχεδόν παντού και συμπεράνατε ότι $B_X \neq \mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_X))$.

2. Έστω X ένας χώρος Banach με την ιδιότητα το $\mathrm{ex}(B_X)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Αν $\dim(X) = \infty$, δείξτε ότι ο X δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με δυϊκό χώρο.

3. Θεωρούμε τον $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Βρείτε το $\mathrm{ex}(B_X)$. Δείξτε ότι ο X δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με δυϊκό χώρο.

4. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Αν $E \subseteq K$, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $K = \overline{\mathrm{co}(E)}$.

(β) Για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\sup_{x \in K} f(x) = \sup_{x \in E} f(x).$$

5. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον X. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $x_n \xrightarrow{w} x$.

(β) $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in \overline{\mathrm{ex}(B_{X^*})}^{w^*}$.

6. Δείξτε ότι $B_{\ell_\infty} = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_{\ell_\infty}))}^{\|\cdot\|}$.

7. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Έχουμε δει ότι ο Y^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $X^*/N(Y)$ (δείτε τις ασκήσεις της παραγράφου 2.3). Δείξτε ότι για κάθε $[x] \in \mathrm{ex}(B_{X^*/N(Y)})$ υπάρχει $x_1 \in [x]$ με $x_1 \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$.

8. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ κυρτή και άνω ημισυνεχής: για κάθε $s \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in K : f(x) < s\}$ είναι ανοικτό στο K. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathrm{ex}(K)$ ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in K$.

9. Έστω X, Y συμπαγείς μετρικοί χώροι. Δείξτε ότι για κάθε $f \in C(X \times Y)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in C(X)$ και $h_1, \ldots, h_n \in C(Y)$ ώστε

$$\left| f(x,y) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x) h_j(y) \right| < \varepsilon$$

για κάθε $(x, y) \in X \times Y$.

10. Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια βάση για την τοπολογία του K. Ορίζουμε $f_n : K \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = d(x, K \setminus V_n)$. Δείξτε ότι η άλγεβρα που παράγεται από την (f_n) και από τη σταθερή συνάρτηση $f_0 \equiv 1$ είναι πυκνή στον $C(K)$, και συμπεράνατε ότι ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος.

Κεφάλαιο 7

Θεωρήματα σταθερού σημείου

7.1 Συστολές σε πλήρεις μετρικούς χώρους

Έστω S ένα μη κενό σύνολο και έστω $f : S \to S$. Το $x \in S$ λέγεται **σταθερό σημείο** της f αν $f(x) = x$. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δούμε μερικά θεωρήματα που εξασφαλίζουν την ύπαρξη σταθερού σημείου υπό προϋποθέσεις για την f και το S. Το απλούστερο ίσως τέτοιο θεώρημα είναι το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, στο πλαίσιο των πλήρων μετρικών χώρων.

Θεώρημα 7.1.1 (Banach). *Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συστολή: δηλαδή, υπάρχει $0 \leq \alpha < 1$ ώστε*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Τότε, η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in X$ και ορίζουμε ακολουθία (x_n) στον X θέτοντας $x_n = f(x_{n-1})$ για $n = 1, 2, \ldots$. Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \alpha^n d(x_1, x_0),$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την d βλέπουμε ότι αν $n < m$ τότε

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{s=n}^{m-1} d(x_{s+1}, x_s) \leq d(x_1, x_0) \sum_{s=n}^{m-1} \alpha^s \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \sum_{s=0}^{m-n-1} \alpha^s \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Έπεται ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Η f είναι συνεχής, οπότε $x = \lim_n x_n = \lim_n f(x_{n-1}) =$

$f(\lim_n x_{n-1}) = f(x)$. Άρα, το x είναι σταθερό σημείο της f. Τέλος, η f δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία: αν υπήρχαν $x \neq y$ ώστε $f(x) = x$ και $f(y) = y$, τότε θα είχαμε $0 < d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, δηλαδή $\alpha \geq 1$. □

Μια απλή επέκταση του Θεωρήματος 7.1.1 είναι η εξής.

Θεώρημα 7.1.2. *Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ μια συνάρτηση με την ιδιότητα η $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n φορές) να είναι συστολή. Τότε, η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, η f^n έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x \in X$. Παρατηρήστε ότι

$$f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x).$$

Άρα, το $f(x)$ είναι επίσης σταθερό σημείο της f^n. Αναγκαστικά, $f(x) = x$. Τέλος, αφού κάθε σταθερό σημείο της f είναι και σταθερό σημείο της f^n, η f δεν μπορεί να έχει άλλο σταθερό σημείο. □

7.2 Θεωρήματα σταθερού σημείου σε χώρους με νόρμα

Τα αποτελέσματα αυτής της Παραγράφου βασίζονται στο θεώρημα του Brouwer (για μια απόδειξη, δείτε το: N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators).

Θεώρημα 7.2.1. *Έστω $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\phi : B_n \to B_n$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $x \in B_n$ ώστε $\phi(x) = x$.* □

Το θεώρημα του Brouwer γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 7.2.2. *Έστω X ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, έστω K ένα μη κενό συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X και έστω $f : K \to K$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $X = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$. Η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_2$ και το K είναι $\|\cdot\|$–φραγμένο, άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε $K \subseteq rB_m$.

Ορίζουμε $\phi : rB_m \to K$ με $\phi(x)$ το μοναδικό $y \in K$ για το οποίο $\|x - y\|_2 = d(x, K)$. Η ϕ είναι συνεχής συνάρτηση: Έστω $x_n, x \in rB_m$ με $\|x_n - x\|_2 \to 0$. Αν $\phi(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} y \in K$, τότε

$$\begin{aligned}\|x-y\|_2 &= \lim_n \|x_{k_n} - \phi(x_{k_n})\|_2 = \lim_n d(x_{k_n}, K) \\ &= d(x, K)\end{aligned}$$

διότι η $d(\cdot, K)$ είναι συνεχής, άρα $y = \phi(x)$. Έπεται ότι $\phi(x_n) \to \phi(x)$. Επίσης, $\phi(x) = x$ αν $x \in K$.

Ορίζουμε $h : B_m \to \frac{1}{r}K \subseteq B_m$ με $h(x) = \frac{1}{r}f(\phi(rx))$. Η h είναι συνεχής, οπότε το Θεώρημα 7.2.1 μας δίνει $x \in B_m$ ώστε

$$\frac{1}{r}f(\phi(rx)) = x \in \frac{1}{r}K.$$

Θέτουμε $x_0 = rx \in K$. Αφού $\phi(x_0) = x_0$, παίρνουμε $f(x_0) = f(\phi(x_0)) = f(\phi(rx)) = rx = x_0$. Δηλαδή, το x_0 είναι σταθερό σημείο της f.

Αν ο X είναι τυχών m-διάστατος χώρος με νόρμα, μπορούμε να ορίσουμε $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^m$ ωστε να υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $\sigma : X \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$. Ορίζουμε $g : \sigma(K) \to \sigma(K)$ με $g(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$. Η g έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in K$ ώστε $g(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Τότε, $\sigma(f(x)) = \sigma(x)$, άρα $f(x) = x$. □

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder γενικεύει το Θεώρημα 7.2.2 στο πλαίσιο των απειροδιάστατων χώρων με νόρμα.

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω F ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου X με νόρμα. Έστω $f : F \to F$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $A \subseteq F$ το $\overline{f(A)}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές. Τότε, υπάρχει $x \in F$ ώστε $f(x) = x$.*

Σημείωση. Αν το F υποτεθεί συμπαγές, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : F \to X$ ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος: για κάθε $A \subseteq F$ το $\overline{f(A)}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.3 θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 7.2.4. *Έστω K μη κενό συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου X με νόρμα. Έστω $\varepsilon > 0$ και A πεπερασμένο υποσύνολο του K ώστε $K \subseteq \bigcup\{D(a,\varepsilon) : a \in A\}$. Για κάθε $a \in A$ ορίζουμε $m_a : K \to \mathbb{R}^+$ με $m_a(x) = \varepsilon - \|x - a\|$ αν $x \in D(a,\varepsilon)$ και $m_a(x) = 0$ αλλιώς. Τότε, η συνάρτηση $\phi_A : K \to X$ με*

$$\phi_A(x) = \frac{\sum_{a\in A} m_a(x)a}{\sum_{a\in A} m_a(x)}$$

ορίζεται καλά, είναι συνεχής και $\|\phi_A(x) - x\| < \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

Απόδειξη του Λήμματος. Για κάθε $x \in K$ έχουμε $\sum\limits_{a\in A} m_a(x) > 0$: αν ήταν $m_a(x) = 0$ για κάθε $a \in A$, τότε θα είχαμε $x \notin \bigcup\limits_{a\in A} D(a,\varepsilon)$, άτοπο. Αυτό δείχνει ότι η ϕ_A ορίζεται καλά. Κάθε $m_a : K \to [0,\varepsilon]$ είναι συνεχής, άρα η ϕ_A είναι συνεχής.

Έστω $x \in K$. Τότε,

$$\phi_A(x) - x = \frac{\sum_{a\in A} m_a(x)(a-x)}{\sum_{a\in A} m_a(x)}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $m_a(x) > 0$ τότε $\|a-x\| < \varepsilon$. Άρα, $\|m_a(x)(a-x)\| \leq m_a(x)\cdot\varepsilon$ για κάθε $a \in A$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $\|\phi_A(x) - x\| < \varepsilon$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.3. Θέτουμε $K = \overline{f(F)}^{\|\cdot\|}$. Από την υπόθεση για την f, το K είναι συμπαγές. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε πεπερασμένο υποσύνολο A_n του K με την ιδιότητα

$$K \subseteq \bigcup_{a \in A_n} D(a, 1/n)$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_n := \phi_{A_n}$ όπως στο Λήμμα 7.2.4. Από τον ορισμό της ϕ_n, για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\phi_n(x) \in \mathrm{co}(K) \subseteq F,$$

αφού το F είναι κυρτό. Συνεπώς, η $f_n := \phi_n \circ f$ απεικονίζει το F στο F. Επίσης, από το Λήμμα 7.2.4, για κάθε $x \in F$ έχουμε

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|\phi_n(f(x)) - f(x)\| < \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε τον πεπερασμένης διάστασης χώρο $X_n = \mathrm{span}(A_n)$ και θέτουμε $F_n := F \cap X_n$. Το F_n είναι συμπαγές κυρτό υποσύνολο του X_n και για κάθε $x \in F_n$ έχουμε

$$f_n(x) = \phi_n(f(x)) \in \mathrm{co}(A_n) \subseteq K \cap X_n \subseteq F_n.$$

Αφού η $f_n : F_n \to F_n$ είναι συνεχής, το Θεώρημα 7.2.3 δείχνει ότι υπάρχει $x_n \in F_n$ ώστε $f(x_n) = x_n$.

Η ακολουθία $(f(x_n))$ περιέχεται στο συμπαγές σύνολο K. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $f(x_{k_n}) \to x_0 \in K$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|x_{k_n} - x_0\| &= \|f_{k_n}(x_{k_n}) - x_0\| = \|\phi_{k_n}(f(x_{k_n})) - x_0\| \\ &\leq \|\phi_{k_n}(f(x_{k_n})) - f(x_{k_n})\| + \|f(x_{k_n}) - x_0\| \\ &\leq \frac{1}{k_n} + \|f(x_{k_n}) - x_0\| \to 0. \end{aligned}$$

Από την $x_{k_n} \to x_0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x_0) = \lim_n f(x_{k_n}) = x_0$. □

Σημείωση. Το Θεώρημα του Schauder γενικεύεται και στο πλαίσιο των τοπικά κυρτών χώρων.

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει *κοινό* σταθερό σημείο για μια οικογένεια αφφινικών απεικονίσεων που ορίζονται σε ένα συμπαγές κυρτό σύνολο και αντιμετατίθενται. Μια απεικόνιση $T : X \to X$ λέγεται αφφινική αν υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε η $S : X \to X$ με $S(x) = T(x) - x_0$ να είναι γραμμικός τελεστής.

Θεώρημα 7.2.5 (Markov–Kakutani). *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος, έστω K ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του X και έστω $\{T_i : i \in I\}$ μια οικογένεια συνεχών αφφινικών απεικονίσεων $T_i : K \to K$ οι οποίες αντιμετατίθενται: $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ για κάθε $i, j \in I$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $T_i(x_0) = x_0$ για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in I$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $T_i^{(n)} : K \to K$ με

$$T_i^{(n)} = \frac{I + T_i + T_i^2 + \cdots + T_i^{n-1}}{n},$$

όπου $T_i^k = T_i \circ \cdots \circ T_i$ (k φορές). Από την υπόθεση ότι οι T_i αντιμετατίθενται, έπεται ότι

$$(*) \qquad T_i^{(n)} \circ T_j^{(m)} = T_j^{(m)} \circ T_i^{(n)}$$

για κάθε $i, j \in I$ και $n, m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{K} := \{T_i^{(n)}(K) : i \in I, n \in \mathbb{N}\}.$$

Κάθε σύνολο στην $\mathcal{K}$ είναι συμπαγές και κυρτό. Χρησιμοποιώντας την $(*)$ βλέπουμε ότι, για κάθε $i_1, \ldots, i_k \in I$ και $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$,

$$T_{i_1}^{(n_1)} \circ \cdots \circ T_{i_k}^{(n_k)}(K) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j}^{(n_j)}(K).$$

Δηλαδή, η $\mathcal{K}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τομής. Από τη συμπάγεια του K έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $x_0 \in T_i^{(n)}(K)$ για κάθε $i \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i \in I$ και $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x = x(i,n) \in K$ ώστε

$$x_0 = \frac{x + T_i(x) + \cdots + T_i^{n-1}(x)}{n},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} T_i(x_0) - x_0 &= \frac{T(x) + T_i^2(x) + \cdots + T_i^n(x)}{n} - \frac{x + T_i(x) + \cdots + T_i^{n-1}(x)}{n} \\ &= \frac{1}{n}(T_i^n(x) - x) \in \frac{1}{n}(K - K). \end{aligned}$$

Αφού το K είναι συμπαγές, το $K - K$ είναι επίσης συμπαγές και $0 \in K - K$. Έστω U ανοικτή περιοχή του 0. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $K - K \subseteq nU$ (άσκηση). Άρα, $T_i(x_0) - x_0 \in \frac{1}{n}(K - K) \subseteq U$. Έπεται ότι $T_i(x_0) = x_0$ για κάθε $i \in I$ (το $i \in I$ ήταν τυχόν). □