Ο χώρος του Tsirelson

Ο χώρος του Tsirelson απαντά αρνητικά στο ερώτημα αν κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει ισομορφικά κάποιον από τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ή τον c_0.

Η νόρμα του Tsirelson ορίζεται στον c_{00}. Για την περιγραφή της χρειαζόμαστε κάποια ορολογία. Αν $(I_1, \ldots, I_m)$ είναι μια ακολουθία ξένων διαστημάτων φυσικών αριθμών, λέμε ότι η $(I_1, \ldots, I_m)$ είναι αποδεκτή αν $m < \min I_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, m$. Αν I είναι ένα διάστημα φυσικών και αν $x \in c_{00}$ γράφουμε Ix για τον περιορισμό του x στο I (δηλαδή, $(Ix)_n = x_n$ αν $n \in I$ και $(Ix)_n = 0$ αν $n \notin I$). Ορίζουμε $\|\cdot\|_T$ στον c_{00} θέτοντας

$$\|x\|_T = \max\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^{m}\|I_j x\|_T\right\}$$

όπου το sup παίρνεται πάνω από όλες τις αποδεκτές οικογένειες διαστημάτων. Ο ορισμός της $\|\cdot\|_T$ είναι «πεπλεγμένος», όμως ένα επαγωγικό επιχείρημα δείχνει ότι υπάρχει μια τέτοια νόρμα. Ο χώρος του Tsirelson είναι η πλήρωση T του $(c_{00}, \|\cdot\|_T)$.

Θεώρημα (Tsirelson) Ο χώρος T είναι αυτοπαθής και δεν περιέχει ισομορφικά κανέναν από τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ούτε τον c_0.

Κατασκευές που έχουν την αρχή τους στην κατασκευή του Tsirelson οδήγησαν στη λύση του προβλήματος της ύπαρξης unconditional βασικής ακολουθίας (από τους Gowers–Maurey) και του προβλήματος της παραμόρφωσης (από τους Odell-Schlumprecht).

Βιβλιογραφία

1. F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory.

2. P. G. Casazza and T. J. Shura, Tsirelson's space.

3. B. S. Tsirelson, It is impossible to embed ℓ_p or c_0 into an arbitrary Banach space.