Το θεώρημα του Choquet

Έστω K ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X και έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο K. Λέμε ότι κάποιο $x \in X$ αναπαρίσταται από το μ αν $\int_K f\,d\mu = f(x)$ για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές f στον X. Η υπόθεση ότι ο X είναι τοπικά κυρτός εξασφαλίζει ότι κάθε μέτρο πιθανότητας μ αναπαριστά το πολύ ένα $x \in X$ (το x είναι το «κέντρο βάρους» του μ).

Με αυτήν την ορολογία, το θεώρημα Krein–Milman μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής: αν K είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X, τότε κάθε $x \in K$ αναπαρίσταται από ένα μέτρο πιθανότητας μ στο K, που έχει φορέα την κλειστή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων του K (δηλαδή, $\mu(K \setminus \overline{\mathrm{ex}(K)}) = 0$).

Θεώρημα (Choquet, μετρικοποιήσιμη περίπτωση). Έστω K ένα μη κενό μετρικοποιήσιμο συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X και έστω $x \in K$. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στο K το οποίο αναπαριστά το x και έχει φορέα το σύνολο των ακραίων σημείων του K (δηλαδή, $\mu(K \setminus \mathrm{ex}(K)) = 0$).

Βιβλιογραφία

1. E. M. Alfsen, Compact convex sets and boundary integrals.
2. J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces.
3. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem.