Πλήρως μονότονες συναρτήσεις: το θεώρημα του Bernstein

Μια συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ λέγεται πλήρως μονότονη αν έχει παραγώγους κάθε τάξης και $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$. Με άλλα λόγια, αν η f είναι μη αρνητική και φθίνουσα, και το ίδιο ισχύει για καθεμία από τις συναρτήσεις $(-1)^n f^{(n)}$. Παραδείγματα πλήρως μονότονων συναρτήσεων είναι οι $x^{-\alpha}$, $e^{-\alpha x}$, όπου $\alpha > 0$.

Θεώρημα (S. Bernstein) Αν $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια πλήρως μονότονη συνάρτηση, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ στο $[0, \infty]$ ώστε: για κάθε $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\, d\mu(t).$$

Το αντίστροφο ισχύει επίσης: κάθε συνάρτηση που αναπαρίσταται κατ' αυτόν τον τρόπο είναι πλήρως μονότονη.

Μια απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος Krein–Milman.

Βιβλιογραφία

1. S. N. Bernstein, Sur les fonctions absolument monotones.
2. D. V. Widder, The Laplace Transform.
3. R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem.