ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

(Ημερομηνία Παράδοσης: 28 Μαρτίου 2007)

1. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $\mathrm{int}(Y) \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

2. Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε ένα χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$ για κάθε n.]

3. Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά) ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

4. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με τις νόρμες $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$ και $x \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $p > N$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

5. Έστω $C^k[0,1]$ ο χώρος όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν k συνεχείς παραγώγους, με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{0 \leq s \leq k} \left(\max\{|f^s(t)| : t \in [0,1]\}\right).$$

Δείξτε ότι ο $C^k[0,1]$ είναι χώρος Banach.

6. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η κύμανση της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\right\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, τότε λέμε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο $BV[0,1]$ όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0,1]$ και ότι ο $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

7. Έστω $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Δείξτε ότι η απόσταση του x από τον c_0 είναι ίση με

$$d(x, c_0) = \limsup_n |x_n|.$$

8. Έστω $1 \leq p < +\infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Δείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$