

Εξετάσεις Επιχειρησιακή Έρευνα - Στοχαστικά Υποδείγματα 30/03/2021

Θέμα 1: Ένας φοιτητής θέλει να προγραμματίσει την επανάληψή του, την Κυριακή, μία μέρα πριν την αρχή των εξετάσεων. Ο φοιτητής δίνει εξετάσεις σε 3 μαθήματα, το Α, Β και Γ, τη Δευτέρα, Τρίτη και Τετάρτη αντίστοιχα, μετά τη δουλειά του. Έχει αποφασίσει να αφιερώσει ακριβώς 2 ώρες μελέτης κάθε βράδυ για το μάθημα που εξετάζεται την επόμενη μέρα το πρωί και μπορεί να διαθέσει ακόμα 4 ώρες την Κυριακή το πρωί, όχι όμως όλες για ένα μάθημα. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται εκτιμήσεις της πιθανότητας να περάσει το κάθε μάθημα αν κάνει επανάληψη συνολικά απο 2 μέχρι 5 ώρες.

	A	B	Γ
2	0.3	0.2	0.1
3	0.5	0.4	0.3
4	0.7	0.6	0.5
5	0.8	0.7	0.6

Να ορίσετε ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα, να γράψετε τις εξισώσεις βελτιστότητας, και να καθορίσετε τη βέλτιστη κατανομή των ωρών μελέτης του φοιτητή στα μαθήματα Α, Β και Γ, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα να περάσει και τα 3 μαθήματα.

Θέμα 2: Δίνεται μία μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, 8\}$ και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Να γίνει ένα διάγραμμα μεταβάσεων πρώτης τάξης, η ταξινόμηση των καταστάσεων της μαρκοβιανής αλυσίδας, και να χαρακτηριστούν ως επαναληπτικές/μεταβατικές και απεριοδικές/περιοδικές.

Θέμα 3: Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών υπολογιστών διατηρεί για κάθε μοντέλο καθημερινές καταστάσεις του αποθέματος, της ζήτησης και των παραγγελιών αναπλήρωσης του αποθέματος. Για ένα συγκεκριμένο μοντέλο οθόνης συμβολίζουμε D_n την ζήτηση της ημέρας n (n οποία έχει συνάρτηση κατανομής F_D) και X_n το πλήθος των διαθέσιμων προϊόντων στο κατάστημα στο τέλος της ημέρας n . Η αποθήκη του καταστήματος έχει μέγιστη χωρητικότητα 5 οθόνες και ο υπεύθυνος του τιμήματος παραγγελιών ζητά αναπλήρωση του αποθέματος μόνο αν στο τέλος μίας ημέρας δεν υπάρχει καμία οθόνη στην αποθήκη (n αναπλήρωση γίνεται άμεσα και το απόθεμα επιστρέφει στο 5 την επόμενη μέρα λειτουργίας). Θεωρούμε αρχικό απόθεμα $X_0 = 5$.

1. Μοντελοποιήστε την εξέλιξη του αποθέματος (X_n) ως συνάρτηση της πολιτικής παραγγελιών (Π_n) και της ζήτησης (D_n). Δείξτε ότι η (X_n) είναι μία μαρκοβιανή αλυσίδα.
2. Υπολογίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P της (X_n) .
3. Υποθέτουμε τώρα ότι $P(D_n = i) = d_i > 0$ μόνο για $i = 0, 1, 2$. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας ως συνάρτηση των d_0 και d_1 .
4. Θεωρούμε ακόμη πως κάθε παραγγελία μεγέθους z επιφέρει κόστος $c_{order}(z) = 5 + 2z$, ενώ η αδυναμία ικανοποίησης z μονάδων ζήτησης επιφέρει ζημιά $c_{loss}(z) = 3z$. Μοντελοποιήστε τη συνάρτηση κόστους συναρτήσει των X_t, D_{t+1} και υπολογίστε το αναμενόμενο ημερήσιο κόστος, υπό την υπόθεση ότι η X_t έχει φτάσει σε κατάσταση στασιμότητας. Να γίνει αριθμητική εφαρμογή για $d_0 = 0.4$ και $d_1 = 0.4$.
5. Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις εξετάστε αν μία αλλαγή πολιτικής αναπλήρωσης του αποθέματος, όπου στο τέλος μίας ημέρας αν υπάρχουν λιγότερες από 2 οθόνες, το απόθεμα επιστρέφει στις 5 οθόνες, μπορεί να βελτιώσει τα κέρδη της επιχείρησης.