Μέθοδοι Επίλυσης

→ Εξαντλητική απαρίθμηση

καταγραφή όλων των δυνατών πολιτικών και υπολογισμός της

$$E_{\Pi(R)}(C) = \sum_{i=0}^{M} C_{ik} \Pi_i \quad , \text{ όπου } k = d_i(R) \quad , \forall R$$

Επιλέγουμε την πολιτική R που ελαχιστοποιεί το παραπάνω μέσο κόστος.

Η παραπάνω μέθοδο προϋποθέτει τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής $\forall R$.

2

Εφαρμογή στο Παράδειγμα της προηγ. διάλεξης:

Είχαμε 4 πολιτικές R_a, R_b, R_c, R_d.

Όλες οι πολιτικές μας δίνουν αδιαχ. μ.α.

$\Longrightarrow \exists!$ στάσιμη κατανομή.

R_a:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_b:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_c:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_d:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

πολιτική	στάσιμο διάνυσμα	$E(C_i)$ [σε χιλιάδες]
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{13}\left(2\times 0 + 7\times 1 + 2\times 3 + 2\times 6\right) = 1{,}923$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\dots = \boxed{1{,}667}$
R_c	$\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	$\dots = 1{,}727$
R_d	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$	$\dots = 3{,}000$.

C_{ik} υπολογίζεται από την τελευτ. στήλη με τα κόστη.

$\Rightarrow R_b$ είναι η βέλτιστη πολιτική αφού πετυχαίνουμε το ελάχιστο με αυτήν.

Μέθοδοι Επίλυσης — Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής

Μπορεί ν.δ.ο. $\forall$ πολιτική R, $\exists\ \underset{1}{\underline{g(R)}}, \underset{M+1 \to M}{\underline{U_i(R)}}$, $0 \le i \le M$:

$$g(R) + U_i(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} P_{ij} U_j(R), \quad \forall i = 0, 1, \ldots, M$$

- Λόγω σύμβασης, θέτουμε $U_M(R) = 0$, και έτσι έχουμε $M+1$ εξισώσεις με $M+1$ αγνώστους και μοναδική λύση στο σύστημα.
- Δείτε σελ. 1064–65 για μια εμπειρική αιτιολόγηση των παραπάνω εξισώσεων και ερμηνεία των ποσοτήτων $\underline{g(R) = E_\pi(C)}$ και $U_i(R)$: η επίδραση στο συνολικό αναμενόμενο κόστος, λόγω εκκίνησης στην κατάστ. i.

• Οι προηγούμενες εξισώσεις είναι στη βάση κατασκευής του επόμενου αλγορίθμου.

Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής.

Αρχικοποίηση : επιλέγουμε αυθαίρετα μία αρχική πολιτική R_1 και θέτουμε $n=1$.

Επανάληψη n : [συνίσταται από 2 βήματα].

Βήμα 1 → Βήμα Προσδιορισμού Τιμών.

Για μία πολιτική R_n, χρησιμοποιούμε τα $p_{ij}(k)$, C_{ik} και $U_M(R_n)=0$ για να λύσουμε το σύστημα των $M+1$ εξισώσεων:

$$g(R_n) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k)\, U_j(R_n) - U_i(R_n), \ \forall i=0,1,\dots,M$$

με $M+1$ αγνώστους τα $g(R_n), U_0(R_n), U_1(R_n), \dots, U_{M-1}(R_n)$.

Βήμα 2 → **Βήμα Βελτίωσης Πολιτικής.**

$\forall i$ → ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση

$$\underbrace{C_{ik}}_{?}^{(k)} + \sum_{j=0}^{M} \underbrace{P_{ij}}_{?}^{(k)}(k)\, \underbrace{U_j(R_n)}_{\checkmark} - \underbrace{U_i(R_n)}_{\checkmark}$$

ως προς τα εφικτά $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$.

βρίσκοντας τη βέλτιστη απόφαση k_i^*, (πετυχ. το ελάχιστο)

$\forall$ κατάσταση i.

Τότε, θέτουμε $\boxed{d_i(R_{n+1}) = k_i^*}$

Αποδεικνύεται ότι η R_{n+1} δεν είναι χειρότερη από την R_n.

Βήμα 2 → Βήμα Βελτίωσης Πολιτικής.

$\forall i \rightarrow$ ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση

$$\underbrace{C_{ik}}_{?}{}^{(k)} + \sum_{j=0}^{M} \underbrace{P_{ij}}_{?}{}^{(k)} \, U_j(R_n) - U_i(R_n)$$

ως προς τα εφικτά $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$.

βρίσκοντας τη βέλτιστη απόφαση k_i^*, (πετυχ. το ελάχιστο) $\forall$ κατάσταση i.

Τότε, θέτουμε $\boxed{d_i(R_{n+1}) = k_i^*}$

Αποδεικνύεται ότι η R_{n+1} δεν είναι χειρότερη από την R_n.

Έλεγχος Βελτιστότητας :

Η παρούσα πολιτική R_{n+1} είναι βέλτιστη αν συμπίπτει με την R_n και τότε σταματάει ο αλγόριθμος.

Διαφορετικά, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με την καινούρια πολιτική.

Ιδιότητες του Αλγορίθμου

1) $g(R_{n+1}) \leq g(R_n)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

2) Ο αλγόριθμος τερματίζει με μία βέλτιστη πολιτική σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Παράδειγμα : επίλυση με Α.Β.Π.

Αρχικοποίηση : θέτουμε $R_1 = R_a$ (αντικατάσταση στην 3 και τίποτα στις άλλες)

Υπενθύμιση

πολιτική R_1

κατάστ. i	απόφαση k
0	1
1	1
2	1
3	3

Πίνακας μετάβασης για R_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

κόστοι $C_{ik}(R_1)$

κατάστ.	C_{ik} (σε χιλ.).
0	0
1	1
2	3
3	6

Επανάληψη 1

- Βήμα Προσδ. Τιμών.

$$U_3 = 0.$$

$$g(R_i) = C_{ik}(R_i) + P_{i0}(k)U_0(R_i) + \dots P_{i2}(k)U_2(R_i) - U_i(R_i)$$

- $i=0$: $g = 0 + 0 + \frac{7}{8}U_1 + \frac{1}{16}U_2 - U_0$
- $i=1$: $g = 1 + 0 + \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{8}U_2 - U_1$
- $i=2$: $g = 3 + 0 + 0 + \frac{1}{2}U_2 - U_2$
- $i=3$: $g = 6 + 1 \cdot U_0 + 0 + 0$

$\Rightarrow \dots$

$g(R_1) = 1{,}923$ $\quad U_0(R_1) = -4{,}077 \quad U_1(R_1) = -2{,}615$

$U_2(R_1) = 2{,}154 \quad [U_3(R_1) = 0].$

Επανάληψη 1

- **Βήμα Προσδ. Τιμών.**

$U_3 = 0.$

$$g(R_i) = C_{ik}(R_i) + P_{i0}(k) U_0(R_i) + \dots P_{i2}(k) U_2(R_i) - U_i(R_i)$$

- $i=0$: $g = 0 + 0 + \frac{7}{8} U_1 + \frac{1}{16} U_2 - U_0$
- $i=1$: $g = 1 + 0 + \frac{3}{4} U_1 + \frac{1}{8} U_2 - U_1$
- $i=2$: $g = 3 + 0 + 0 + \frac{1}{2} U_2 - U_2$
- $i=3$: $g = 6 + 1 \cdot U_0 + 0 + 0$

$\Rightarrow \dots$

$\underline{g(R_1) = 1{,}923}$ $\quad U_0(R_1) = -4{,}077$, $U_1(R_1) = -2{,}615$

$U_2(R_1) = 2{,}154$ $\quad [U_3(R_1) = 0]$.

• Βήμα Βελτίωσης Πολιτικής.

$i=0$: $C_{0k} - P_{00}(k)\times 4{,}077 - P_{01}(k)\times 2{,}615 + P_{02}(k)\times 2{,}154 + (4{,}077)$

Επιλογή

$$
\begin{array}{c c c c c}
 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\
R_a : & 1 & 1 & 1 & 3 \\
R_b : & 1 & 1 & 2 & 3 \\
R_c : & 1 & 1 & 3 & 3 \\
R_d : & 1 & 3 & 3 & 3 \\
\text{Εφικτά} & \{1\} & \{1,3\} & \{1,2,3\} & \{3\}
\end{array}
$$

μόνη επιλογή $k=0$.

$$\Downarrow$$

• $\boxed{d_0(R_2) = 1}$

$\boxed{i=1}$

συνάρτηση (k)

(11)

$$C_{1k} - P_{10}(k)4{,}077 - P_{11}(k)\times 2{,}615 + P_{12}(k)\times 2{,}154 + 2{,}615$$

$$d_1(R) \in \{1, 3\}$$

απόφαση k	C_{1k}	$P_{10}(k)$	$P_{11}(k)$	$P_{12}(k)$	Τιμή
1	1	0	3/4	1/8	1,923
3	6	1	0	0	4,538

$$\Rightarrow \quad d_1(R_2) = 1$$

συνάρτηση.

$\boxed{i=2}$

$$C_{2k} - P_{20}(k)\times 4{,}077 - P_{21}(k)\times 2{,}615 + P_{22}(k)\times 2{,}154 - 2{,}154.$$

$d_2(R) \in \{1,2,3\}$.

απόφαση	C_{2k}	$P_{20}(k)$	$P_{21}(k)$	$P_{22}(k)$	Τιμή.
1	4	0	0	1/2	1,923
2	3	0	1	0	−0,769
3	6	1	0	0	−0,231

$\Rightarrow \quad d_2(R_2) = 2.$

$\boxed{t=3.}$

μοναδική επιλογή $\quad d_3(R_2) = 3$

Έλεγχος Βελτιστότητας.

$R_1 = R_a \Downarrow (1,1,1,3)$, ενώ $R_2 = R_b \Downarrow (1,1,2,3)$

άρα $R_2 \neq R_1$ και συνεχίζουμε ...

Επανάληψη 2.

Θέτουμε $R_2 = R_b$.

- Βήμα Προσδιορισμού Τιμών.

πολιτική | πίνακας μεταβάσεων | κόστοι $C_{ik}(R_2)$.

+ σύστημα εξισώσεων $\Longrightarrow$

$g(R_2) = 1{,}667$, $U_0(R_2) = -4{,}333$, $U_1(R_2) = -3$, $U_2(R_2) = -0{,}667$

(14)

- Βήμα Βελτίωσης πολιτικής

$\Rightarrow \dots \Rightarrow R_3 = R_2 \Rightarrow \boxed{R^* = R_b}$

με ελάχιστο μέσο κόστος σε στασιμότητα

$$\boxed{g(R_2) = 1,667}$$

Σχολιασμος Θεμα 3 (2017).

15

(α) $(X_n)_{n\geq 0}$ στοχ. διαδικασια της μεταβολης της τιμής σε ημερήσια βάση με $X_n \in \{0,1\}$, ανάλογα αν η μεταβολή είναι πτωτική ή ανοδική αντίστοιχα.

Υποθέσεις

$$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{όχι μ.α.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=0) = \frac{1}{2} \\ P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=1) = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{χάνουμε τη μαρκοβ. ιδιότητα.}$$

16

• <u>μοντελοποίηση ως μ.α.</u>

Ορίζουμε $(Y_n)_{n\geq 0}$ με

$$Y_n = (X_{n+1}, X_n) \quad \text{ή} \quad (X_n, X_{n+1})$$

έχουμε

$$Y_n \in \{ \overset{0}{(0,0)}, \overset{1}{(0,1)}, \overset{2}{(1,0)}, \overset{3}{(1,1)} \}.$$

και προκύπτει μ.α.

$$P(Y_{n+1} = (0,0) \mid Y_n = (0,0)) =$$

$$P(X_{n+2} = 0, X_{n+1} = 0 \mid X_{n+1} = 0, X_n = 0)$$

$$= P(X_{n+2} = 0 \mid X_{n+1} = 0, \cancel{X_n = 0}) = \frac{2}{3}$$

πιθ. 1.

$$P\left(Y_{n+1}=(0,1)\;\middle|\;Y_n=(0,0)\right)$$

$$= P\left(X_{n+2}=0,\ X_{n+1}=1 \;\middle|\; X_{n+1}=0,\ X_n=0\right) = 0.$$

סות. 0

...

$$P = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

13

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[loop above] \arrow[r] & (1,0) \arrow[dl, shift left] \arrow[d] \\
(0,1) \arrow[u] \arrow[ur, shift left] & (1,1) \arrow[l] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ (Y_n) είναι αδιαχ. μ.α.

για να συνεχίσετε

$(0,0) \to 0$, $(0,1) \to 1$

$(1,0) \to 2$, $(1,1) \to 3$.

στάσιμη κατανομή. → εξαιρ. 1 εξίσ.

19

πρέπει $\pi P = \pi$ και $\sum_{i=0}^{3} \pi_i = 1$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3}\pi_0 + \tfrac{2}{3}\pi_1 &= \pi_0 \\
\tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{2}{3}\pi_3 &= \pi_1. \\
\tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{3}\pi_1 &= \pi_2 \\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1
\end{aligned}
\iff
\begin{aligned}
\pi_0 &= 2\pi_2 \\
\pi_1 &= \pi_2 \\
\pi_3 &= \tfrac{3}{4}\pi_2. \\
\tfrac{19}{4}\pi_2 &= 1
\end{aligned}$$

$$\iff \pi_0 = \frac{8}{19}, \ \pi_1 = \frac{4}{19}, \ \pi_2 = \frac{4}{19}, \ \pi_3 = \frac{3}{19}.$$

20

(γ) Βλέπουμε άμεσα ότι

$P_{(0,0),(0,0)}$ (ή P_{00}) > 0 άρα

(Y_n) αδιαχ. + εργοδική μ.α. $\Longrightarrow$
(απεριοδική).

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

$\pi \to$ διαν. γραμμή το στάσιμο διάνυσμα.

(δ) μακροπρόθεσμο ποσοστό ημερών με άνοδο.

Ερμηνεία της στάσιμης κατανομής

$\pi_i \longrightarrow$ μακροπρόθεσμο ποσοστό χρονικών στιγμών (ημέρες) που η αλυσίδα βρίσκεται στην i.

ημέρες $\longrightarrow$ χρονικές στιγμές.

άνοδο $\longrightarrow$ κατάσταση της 1 της $\underline{X_n}$

αρχικής.

Εδώ όμως Y_n είναι η μ.α.

άνοδος $\longrightarrow$ $\{(0,1),(1,1)\}$ ή $\{(1,0),(1,1)\}$

απάντηση: $\pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)} = \pi_{(1,0)} + \pi_{(1,1)}$

$$P_\pi(X_n=1) = P_\pi(X_n=1, X_{n+1}=0) \longrightarrow \pi_{(1,0)}$$

$$+ P_\pi(X_n=1, X_{n+1}=1) \longrightarrow \pi_{(1,1)}$$

$$P_\pi(X_n=1) = P_{\pi}(\underbrace{X_{n-1}=0,\ X_n=1}) + P_{\pi}(\underbrace{X_{n-1}=1,\ X_n=1})$$

$$= \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)} = \frac{7}{19}.$$

$\longrightarrow$ μακροπρόθεσμο ποσοστό διαδοχ. ημερών με άνοδο.

$$P_\pi(X_n=1,\ X_{n+1}=1) = \pi_{(1,1)} = \frac{3}{19}.$$