Διάλεξη 4

Ταξινόμηση καταστάσεων μιας μ.α.

σημ.

- $i \to j$: η j είναι προσιτή από την i,
  ή η i οδηγεί στη j, αν
  $$\exists n \geq 0 : \; p_{ij}^{(n)} > 0$$
- $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow i \to j \wedge j \to i$
  οι i και j επικοινωνούν.

Αποδ. ότι η σχέση επικοινωνίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας (αυτοπαθής, συμμετρ. ιδιότητα, μεταβατική)

②

Κάθε σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το σύνολο σε κλάσεις ισοδυναμίας.

Κάθε κλάση ισοδυναμίας έχει κοινά χαρακτηριστικά και για τον έλεγχο κάποιας ιδιότητας αρκεί να παίρνουμε μία μόνο κατάσταση για να ελέγχουμε.

→ σημαντική περίπτωση

Αν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, τότε η μ.α. λέγεται αδιαχώριστη ή αναγωγη (irreducible)

- Αν ικανοποιείται η συνθήκη ότι

$$\exists n \geq 1 : P_{ij}^{(n)} > 0 \quad , \quad \forall i, j \in S$$

Τότε η μ.α. είναι αδιαχώριστη.

π.χ. $P = \begin{pmatrix} >0 & >0 \\ >0 & >0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ αδιαχ.

αν $P^2 = \begin{pmatrix} >0 & >0 \\ >0 & >0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ αδιαχ.

Ορσ: Η $i \in S$ λέγεται **μεταβατική** (transient) αν $\exists\, j \in S : i \to j$ και $j \not\to i$

(από τη στιγμή που θα επισκεφτώ τη j, πότε δεν επιστρέφω στην i)

$\Rightarrow$ # επισκέψεων στην $i < +\infty$ (με πιθ. 1)

• Η $i \in S$ λέγεται **επαναληπτική** (recurrent) αν δεν είναι μεταβατική.

$\Rightarrow$ # επισκέψεων στην $i = +\infty$ (με πιθ. 1)

5

Ειδικά αν $P_{ii} = 1$, τότε η i λέγεται απορροφητική. (absorbent)
(αν μπω στην i, μένω εκεί για πάντα.)

- Η επαναληπτικότητα και η μεταβατικότητα είναι ιδιότητες της κλάσης επικοινωνίας.

Αν μία κατάσταση της κ.ε. είναι επαναλ. ή μεταβατική τότε όλες οι καταστάσεις της ίδιας κλάσης θα έχουν την ίδια ιδιότητα.

Μια αδιαχώριστη μ.α. είναι κατ' ανάγκη <u>επαναληπτική</u>, αφού όλες οι καταστάσεις δεν μπορεί να είναι μεταβατικές για πεπερ. χώρο καταστ.

<u>Ασκήσεις</u>

16.2.3, 16.4.2, 16.4.3. ($\exists$ λυμ. Ασκ. στο e-class).

Για μ.α. με ∞ αριθμ. καταστ.

μπορούμε να έχουμε 1 κλάση επικοινωνίας και όμως να μην είναι επαναληπτική, δηλ. να είναι μεταβατική.

$\boxed{16.2.2.}$

α) πίνακας μετάβασης για $(Z_t)_{t \geq 0}$

όπου $Z_t = \begin{cases} 0 & , X_t = 0, \ X_{t+1} = 0 \\ 1 & , X_t = 0, \ X_{t+1} = 1 \\ 2 & , X_t = 1, \ X_{t+1} = 0 \\ 3 & \ \ X_t = 1, \ X_{t+1} = 1. \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} (0, & 0, & 1) \\ t & t+1 & t+2 \end{array}$$

Αν $P(X_{t+2} = 1 \mid X_t = 1, X_{t+1} = 1) = a_1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & = a_2 \\ 1 & 1 & 0 & = a_3 \\ 1 & 0 & 0 & = a_4 \end{array}$$

δείξτε το.

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{array} \begin{pmatrix} 1-a_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a_2 & a_2 \\ 1-a_3 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$P(Z_{t+1}=1 \mid Z_t=0)$$

$$P(X_{t+2}=1, \cancel{X_{t+1}=0} \mid X_{t+1}=0)$$

$$X_t=0)$$

$(0 < a_i < 1)$ ⇒ όλες επικοινωνούν.

Ταξινόμηση καταστάσεων

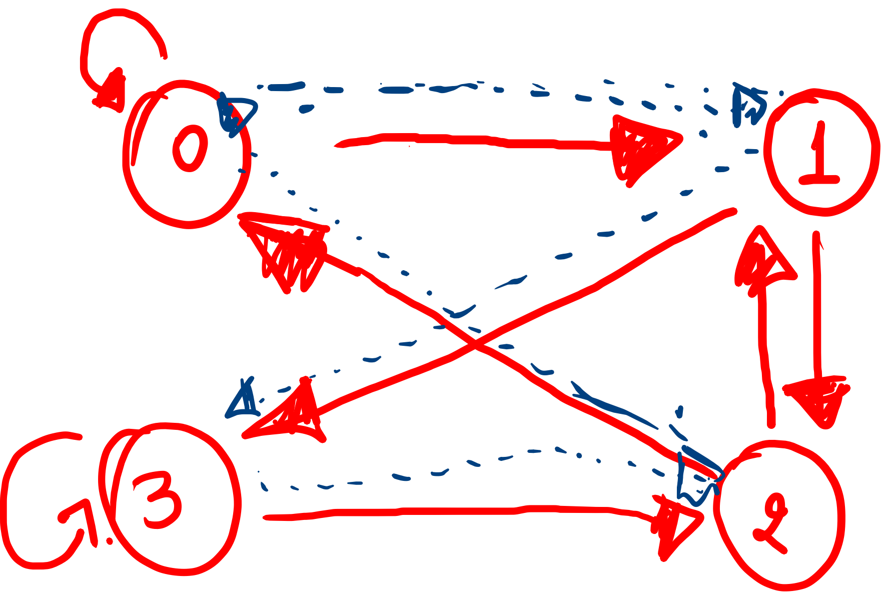
$$0 \to 1 \to 2$$

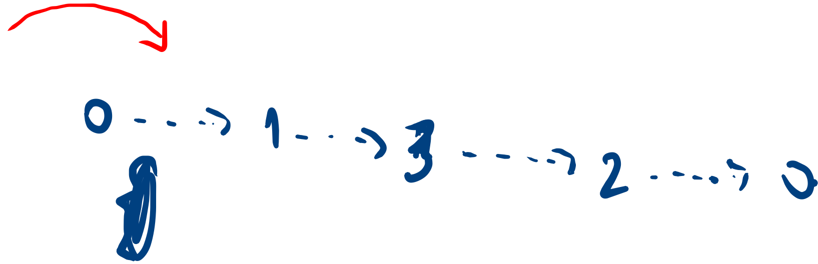
$$1 \to 3 \to 2 \to 0$$

Άρα η μ.α. είναι αδιαχώριστη.

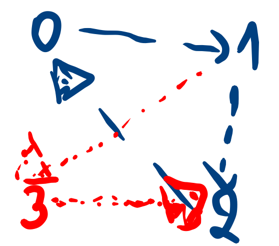
εναλλακτ.

διάγρ. κατ. μεταβ.





{0, 1, 2}.



16.4.5.

$0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 0$

11

$$
P = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/10 & 2/5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$C_1 = \{3\} \Rightarrow$ απορρ. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{επαναληπτ.}}$

$C_2 = \{0, 1, 2, 4\}$ — 2= κλάση επικ.

$\to$ μεταβατική

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$0 \to 1 \to 0$

επικοιν. ✓

0 1 0 1 0 1 0 1 .

1 0 1 0 1 0 1 0 .

αδιαχ ✓

$\Rightarrow$ επαναλ.

$C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1\}$.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

0 0 0 . . 0 . . .

1 1 1 . . 1 . . .

$\to$ όχι αδιαχ.

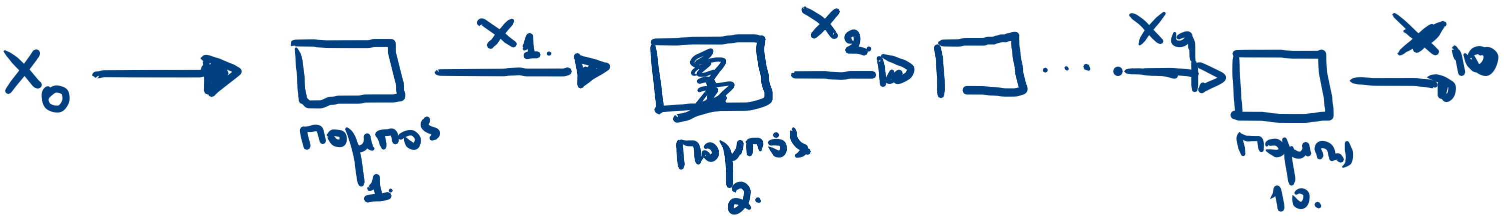
& επαναλ. κλάσεις.

$0 \to 3$

$\cancel{3 \to 0}$

16.3.2 :

αναμετάδοση ενός ψηφίου.



$\underline{X_t \in \{0,1\}}$, $t=0,1,\dots,10.$

Υπόθεση

κάθε φορά που λαμβάνεται ένα ψηφίο, υπάρχει πιθανότητα $\frac{1}{100}$ να αναπαραχθεί εσφαλμένα από κάθε πομπό..

X_{t+1} εξαρτάται μόνο από τη X_t $\rightarrow$ μαρκοβ. αλυσίδα ✓

Πίνακας μετάβασης

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.99 & 0.01 \\ 1 & 0.01 & 0.99 \end{array}$$

$\{0, 1\} \to \{0, 1\}$.

$\{1, 0\} \to \{1, 0\}$.

$$P' = \begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.99 \end{array}$$

<u>Ερώτημα:</u> Ποιά η πιθανότητα μετά τη $10^{η}$ αναμετάδοση να έχει αναπαραχθεί το ψηφίο σωστά ? (σωστή αναμετάδοση)

$$P(X_{10} = 0 \mid X_0 = 0) = P_{00}^{(10)} = \dots = (P^{10})_{11}$$

$$P(X_{10} = 1 \mid X_0 = 1) = P_{11}^{(10)} = P_{00}^{(10)}$$

$\simeq 0.908$

Περιοδικότητα καταστάσεων

Παρ. 1:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow P^{(n)} = P^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{αν } n = 1, 3, 5, \ldots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

2 δυνατ. πραγμ.

αν $X_0 = 0$, 0 1 0 1 0 1 ...

αν $X_0 = 1$, 1 0 1 0 1 0 ....

$$\underbrace{\{n > 0 : P_{00}^{(n)} > 0\}}_{} = \overbrace{\{2, 4, 6, \ldots\}}^{D_0}.$$

$d_0 = \mu.\kappa.\delta.\ D_0 = 2 \rightarrow$ περίοδος της κατ. 0.

$d_1 = $ μ.κ.δ. $D_1 = $ μ.κ.δ.$(\{2, 4, 6, \ldots\}) = 2.$

$d_0 = d_1 = 2$ η περίοδος της 0 και 1.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow C = \{0, 1\}.$ <u>επαναληπτική</u>.

<u>αδιαχ.</u> μ.α. και.

και <u>περιοδική</u> με <u>περίοδο</u> $d_0 = d_1 = 2.$

- Η περίοδος είναι και αυτή ιδιότητα της <u>κ.ε.</u>

Παρ. 2.

Ένας τζογαδόρος ξεκινά με 1€ και ποντάρει κάθε φορά 1 €

$$1\,€ \begin{cases} \xrightarrow{p} +1. & (\text{κερδίζει}) \\ \xrightarrow{1-p} -1 & (\text{χάνει}). \end{cases}$$

Το παιχνίδι τελειώνει όταν βρεθεί με 0 € ή 3 €.

Τότε αν X_t είναι το ποσό που έχει ο παίκτης μετά την t-παρτίδα, έχουμε ότι η (X_t) είναι μ.α. αφού αν X_t είναι γνωστό, τότε η κατανομή της X_{t+1} εξαρτ. μόνο από το X_t (χωρίς γνώση των προηγούμ.) και τις πιθαν. p και $1-p$.

17

$X_t \in \{0,1,2,3\}$.

Έχουμε πίνακα μετάβασης.

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ταξινόμηση καταστάσεων.

- $C_1 = \{0\}$ απορροφ $\Rightarrow$ επαναλ. | απεριοδική (όχι περιοδική)
- $C_2 = \{3\}$ απορροφ $\Rightarrow$ επαναλ. | απεριοδική
- $C_3 = \{1,2\}$. ? μεταβ + περιοδική περίοδος 2

$1 \to 2 \to 1$

$d_1 = \mu.\kappa.\delta.\, D_1 = 2.$

$D_1 = \{n>0 : P_{11}^{(n)} > 0\} = \{2,4,6,\dots\}$

18

$d_i = $ μ.κ.δ. $D_i \longrightarrow$ περίοδος της κατ. i.

$D_i = \{ n > 0 : P_{ii}^{(n)} > 0 \}$ $\Rightarrow$ μεταφ. στη C_i.

Όταν $d_i = 1$, τότε η i λέγεται απεριοδική (λέμε περίοδο 1)

και αν $D_i = \emptyset$, τότε η περίοδος δεν ορίζεται (ή $d_i = +\infty$).

Ορσ:

- Όταν λοιπόν η i είναι απεριοδική και επαναληπτική, τότε λέγεται εργοδική.
- Μια μ.α. λέγεται εργοδική, όταν όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι αδιαχώριστες + εργοδικές.

π.χ. 1

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow C_1 = \{0\}, \quad C_2 = \{1\}.$$

C_1: ↓ απερ. + επαναλ. ⇓ εργοδική

C_2: ↓ απερ. + επαναλ. ⇓ εργοδική.

⇓

η μ.α. είναι εργοδική αλλά όχι αδιαχώριστη,

(2)

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & & \\ 1 & & \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

αδιαχώρ + επαναληπτ + απεριοδική } εργοδική

20

(3)

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & & \\ 1 & & \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow C_1 = \{0, 1\}.$$

αδιαχώριστη

επαναληπτ. + περιοδική με $d=2$ } .

όχι ΕΡΓΟΔΙΚΗ.

$$D_0 = \{ n > 0 : P_{00}^{(n)} > 0 \} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

0 1 0 1 0 1 0 1

2 4. 6

Αν είναι περιοδική με περίοδο $d \geq 2 \Longrightarrow$ όχι ΕΡΓΟΔΙΚΗ.

Οριακές Ιδιότητες μαρκοβ. αλυσίδ.

Παράδειγμα

(το παράδειγμα αποθεμάτων). → με προσέγγ. σε 3ο δεκ. ψηφίο

$$P^{(8)} = P^8 = P^4 \cdot P^4 = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 1 & 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 2 & 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 3 & 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{array}$$

Παρατήρ.: Η πιθανότητα να βρεθούμε σε κάποια κατάσταση μετά από 8 εβδομάδες (βήματα) <u>δεν</u> εξαρτάται από την κατάσταση που ξεκινήσαμε, δηλ. πολύ γρήγορα εξαφανίζεται η επίδραση της αρχικής κατάστασης.

Παρατηρούμε κιόλας ότι

$$\exists \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$$

Για αδιαχώριστες εργοδικές μ.α. (γενικότερα).

$$\exists \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0 \quad (\text{ανεξ. του } i).$$

$$\Downarrow$$

διαν. γραμμ.

δηλ. $$\exists \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M \\ \vdots & & & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix} = \Pi$$

στάσιμος πίνακας

Πόρισμα

$\forall\, \alpha$ αρχικό διάνυσμα

$$P_n = \alpha P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \Pi = (\alpha_0 \cdots \alpha_M) \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_M \\ \vdots & & & \vdots \\ \pi_0 & \cdots & & \pi_M \end{pmatrix} = (\pi_0 \cdots \pi_M) = \pi$$

στάσιμο διάνυσμα.

$\Longrightarrow$

23

$$P_n = aP^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\Pi = \pi \longrightarrow \text{στάσιμο διάνυσμα}$$

$$P(X_n \in \cdot\,) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(\cdot)$$

σύγκλιση της περιθώριας κατανομής στη στάσιμη κατανομή

Σε αδιαχώριστες + εργοδικές μ.α. ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας.

$$\boxed{\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i P_{ij}, \ \forall j \in \{0,\dots,M\}, \qquad \sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1} \Longleftrightarrow \boxed{\pi = \pi P, \qquad \sum_{j=0} \pi_j = 1}$$

24

(P_n):

$$\lim_{n\to\infty} aP^n = \pi$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{n+1} = \pi$$

Όμως:

$$P_{n+1} = aP^{n+1} = aP^n \cdot P \Rightarrow$$

$$\lim P_{n+1} = (\lim_n aP^n) \cdot P \Rightarrow \boxed{\pi = \pi P}$$

αναγκαία συνθήκη.

ορίζουμε ως στάσιμο διάνυσμα

κάποια π: $\left\{ \pi = \pi P \quad + \quad \sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1. \right\}$

διαν. πιθαν.

αρχικό a: $P_0 = P_1 = P_2 = \dots = a \dots$

$aP = a$

25

Ένα π που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας, λέγεται στάσιμο διάνυσμα της μ.α. και διανυσματικά θα σκεφτόμαστε πάντα ότι

$$\boxed{\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M) : \quad \pi P = \pi \quad + \quad \sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1}$$

Αν $a = \pi$, τότε.

$$P_n = aP^n = \pi P^n = \pi \quad , \forall n \geq 0$$

άρα η μεταβατική κατανομή είναι σταθερή και η μ.α. λέμε ότι βρίσκεται σε στασιμότητα.

• Για αδιαχώριστες εργοδικές μ.α. ισχύουν (26)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j \quad , \forall\, 0 \le j \le M.$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}.$$

και αυτά δίνουν έναν αναλυτικό τρόπο εύρεσης της στάσιμης κατανομής.

Για <u>αδιαχώριστη και περιοδική μ.α</u>:

$\exists$ μοναδική στάσιμη κατανομή, όπως και στις αδιαχώριστες εργοδικές

Όμως $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} P^n$, ούτε $\lim\limits_{n\to\infty} \cancel{P(X_n = j)}$.

άρα η στάσιμη κατανομή δεν είναι οριακή κατανομή της μ.α.

π.χ. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad P^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n - \text{περιττός} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n - \text{άρτιος.} \end{cases}$

άρα $\nexists \lim P^n$.

28

όμως. $\{P^n\}_{n\geq 1}$.

$$\frac{P+P^2+\dots+P^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Pi \quad \text{στάσιμος πίνακος.}$$

π.χ. $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P+P^2+\dots+P^n}{n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{k}{n} & \frac{k+1}{n} \\ \frac{k+1}{n} & \frac{k}{n} \end{pmatrix}, & n=2k+1 \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, & n=2k \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \frac{k}{n} & \frac{k+1}{n} \\ \frac{k+1}{n} & \frac{k}{n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι.

$\nexists \lim P(X_n=\cdot)$.

αλλά

$$\frac{P(X_1=j)+\dots+P(X_n=j)}{n} \to \Pi_j \quad , \forall j\in\{0,\dots,m\}.$$

Παρατήρηση.

- Για i, j επαναληπτικές σε διαφορετικές κ.ε.

$$P_{ij}^{(n)} = 0 \;, \quad P_{ji}^{(n)} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{ji} = 0.$$

- Επίσης αν j είναι μεταβατική κατάσταση.

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \quad , \quad \forall i \in S.$$