

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2016

Θέμα 1: Ένας φοιτητής θέλει να προγραμματίσει την επανάληψή του, την Κυριακή, μία μέρα πριν την αρχή των εξετάσεων. Ο φοιτητής δίνει εξετάσεις σε 3 μαθήματα, το A, B και Γ, τη Δευτέρα, Τρίτη και Τετάρτη αντίστοιχα, μετά τη δουλειά του. Έχει αποφασίσει να αφιερώσει ακριβώς 2 ώρες μελέτης κάθε βράδυ για το μάθημα που εξετάζεται την επόμενη μέρα το πρωί και μπορεί να διαθέσει ακόμα 4 ώρες την Κυριακή το πρωί, όχι όμως όλες για ένα μάθημα. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται εκτιμήσεις της πιθανότητας να περάσει το κάθε μάθημα αν κάνει επανάληψη συνολικά από 2 μέχρι 5 ώρες.

	A	B	Γ
2	0.3	0.2	0.1
3	0.5	0.4	0.3
4	0.7	0.6	0.5
5	0.8	0.7	0.6

Να ορίσετε ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα, να γράψετε τις εξισώσεις βελτιστότητας, και να καθορίσετε τη βέλτιστη κατανομή των ωρών μελέτης του φοιτητή στα μαθήματα A, B και Γ, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα να περάσει και τα 3 μαθήματα.

Θέμα 2: Ένας Άγγλος ευγενής A θέλει να στοιχηματίσει με ένα φίλο του, ας πούμε B. Ο B διαθέτει 4 χρυσές λίρες και έτσι λέει ο A στον B να παίξουν ένα παιχνίδι τένις στα 3 σετ όπου τη στρατηγική του πονταρίσματος θα τη διαλέξει ο B (οι δύο παίκτες είναι ισοδύναμοι). Του θέτει όμως κάποιους κανόνες. Σε κάθε σετ μπορεί να ποντάρει το πολύ 2 χρυσές λίρες (0,1 ή 2) τις οποίες και θα κερδίζει ή θα χάνει παροδικά σε κάθε σετ. Νικητής του στοιχήματος θα είναι ο B αν η περιουσία του κάποια στιγμή φτάσει τις 6 λίρες, διαφορετικά κερδίζει ο A. Επιπλέον όροι του παιχνιδιού περιλαμβάνουν ότι η περιουσία του παίκτη B δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 6 χρυσές λίρες σε κανένα σετ, και ότι αν στο πρώτο σετ ο B βρεθεί με 2 λίρες τότε το παιχνίδι σταματάει με νικητή τον A. Να μοντελοποιηθεί το παιχνίδι αυτό με στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό, ναδειχθεί ότι είναι δίκαιο αν ο B κινηθεί βέλτιστα και να βρεθούν οι στρατηγικές του B που μεγιστοποιούν την πιθανότητά του να κερδίσει το στοιχείμα. Είναι το παιχνίδι δίκαιο αν ο B έχει το δικαίωμα να ποντάρει όταν βρεθεί με περιουσία 2 λίρες; Αιτιολογήστε.

Θέμα 3: Ένας πωλητής αναμνηστικών έξω από το μουσείο των Θερμοπυλών μεταξύ άλλων πουλάει και ογκώδη ορειχάλκινα αγάλματα του Λεωνίδα ύψους δύο μέτρων. Λόγω της περιορισμένης χωρητικότητας του καταστήματος ο πωλητής έχει αποφασίσει να έχει διαθέσιμα προς πώληση το πολύ δύο από αυτά τα αγάλματα. Το κέρδος από την πώληση ενός τέτοιου αγάλματος σε εκατοντάδες ευρώ είναι 5. Ο πωλητής έχει αποφασίσει την εξής πολιτική αναπαραγγελιών. Αν στο τέλος της ημέρας βρεθεί χωρίς καθόλου αγάλματα, τότε παραγγέλνει δύο για την επόμενη. Αν όμως βρεθεί με ένα, τότε παραγγέλνει ένα με πιθανότητα $1/3$. Η κατανομή ζήτησης του αγάλματος σε μία μέρα έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι είναι ομοιόμορφη στο $\{0, 1, 2, 3\}$.

- Αν (X_t) είναι η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τον διαθέσιμο αριθμό αγαλμάτων του πωλητή στο τέλος της μέρας t , τότε εξηγήστε γιατί είναι μαρκοβιανή διαδικασία και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης αυτής της αλυσίδας.
- Αφού αιτιολογήσετε ότι η παραπάνω αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και εργοδική, βρείτε τη στάσιμη κατανομή της.
- Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι υπάρχει μία ποινή ίση με 2 για κάθε μονάδα χαμένης ζήτησης, τότε να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος του πωλητή ανα ημέρα από την πώληση αυτού του τύπου των αγαλμάτων.

Θέμα 4: Ένα αστυνομικό τμήμα είναι υπεύθυνο για τη φύλαξη μιας περιοχής που χωρίζεται σε δύο απομακρυσμένες μεταξύ τους ζώνες, την Α και τη Β. Υπάρχουν δύο διαθέσιμα περιπολικά που πρέπει να βρίσκονται σε συνεχή περιπολία στην πιο επικίνδυνη βάρδια που είναι απο τις 12 τα μεσάνυχτα μέχρι τις 4 το πρωί. Ο διοικητής του τμήματος πρέπει να αποφασίζει κάθε νύχτα πώς θα κατανεμηθούν τα περιπολικά στις 2 ζώνες (η περιπολία ενός οχήματος γίνεται αποκλειστικά σε μία ζώνη). Έχει παρατηρηθεί ότι αν σε κάποια ζώνη την προηγούμενη νύχτα δεν υπήρξαν καταγεγραμμένες κλοπές, τότε η πιθανότητα να υπάρξουν την επόμενη είναι 0.5, αν δεν περιπολεί κανένα όχημα, 0.3 αν περιπολεί ένα και 0.2 αν περιπολούν δύο. Αν την προηγούμενη νύχτα υπήρξαν καταγεγραμμένες κλοπές τότε οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι 0.3, 0.2 και 0.1. Υποθέτουμε ότι κλοπές συμβαίνουν ανεξάρτητα στις δύο ζώνες Α και Β. Αν σε μία ζώνη συμβούν κλοπές τότε οι αναμενόμενες απώλειες των κατοίκων σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ είναι 30 αν δεν υπάρχει κανένα περιπολικό, 15 αν υπάρχει ένα και 5 αν υπάρχουν δύο. Το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση των αναμενόμενων απωλειών των κατοίκων και στις 2 ζώνες συνολικά.

- (α) Να οριστεί μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων για το παραπάνω πρόβλημα (δυνατές καταστάσεις, αποφάσεις, πολιτικές). Να υπολογιστεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $P(R)$ και τα άμεσα κόστη $C_{ik}(R)$ για την πολιτική R_1 που καθορίζεται ως εξής: αν την προηγούμενη νύχτα υπήρξε κλοπή σε μία μόνο ζώνη, τότε γίνεται τοποθέτηση και των δύο περιπολικών στη ζώνη που δεν έγινε κλοπή, διαφορετικά κάθε ζώνη προστατεύεται απο ένα περιπολικό.
- (β) Ο ξεροκέφαλος διοικητής του τμήματος είναι πεπεισμένος ότι ο καλύτερος τρόπος τοποθέτησης των περιπολικών είναι ο παραπάνω, ώσπου κάποια στιγμή τυχαίνει να πέσει στην αντίληψη ενός φοιτητή του ΜΑΠ το παραπάνω πρόβλημα. Θα καταφέρετε να πείσετε τον διοικητή με επιχειρήματα ότι έχει άδικο; Δείξτε με τη βοήθεια μιας επανάληψης του αλγόριθμου βελτίωσης πολιτικής ότι η R_1 δεν είναι η βέλτιστη πολιτική σε αυτό το πρόβλημα.
- (γ) Αν λύσατε το παραπάνω ο διοικητής έχει ενθουσιαστεί και είναι έτοιμος να σας ανταμείψει για την προσφορά σας στους κατοίκους της περιοχής. Όμως θα ήθελε να γνωρίζει με σιγουριά ποιά είναι η καλύτερη πολιτική και πόσα χρήματα θα εξοικονομούνται κατα μέσο όρο καθημερινά μακροπρόθεσμα.

Επιλογές: 1,2,3,4(α) ή 1,2,3(α),4(α),4(β) + BONUS για τα υπόλοιπα