

Επιχειρησιακή Έρευνα – Στοχαστικά Μοντέλα

Τελική Εξέταση – Φεβρουάριος 2009

Θέμα 1. Ο διευθυντής μιας αλυσίδας 4 καταστημάτων (K_1, K_2, K_3, K_4) δέχεται προτάσεις από καθένα από αυτά για πιθανή επέκτασή τους. Το συνολικό ποσό διαθέσιμο για την επένδυση είναι το πολύ 5 εκατ. ευρώ. Κάθε κατάσταση έχει κάνει μία ή δύο προτάσεις, ενώ ο διευθυντής μπορεί να εγκρίνει το πολύ μια πρόταση από κάθε κατάσταση (μπορεί και καμιά). Το κόστος και η απόδοση κάθε πρότασης δίνονται στους παρακάτω πίνακες. Να βρεθεί η πολιτική επένδυσης που μεγιστοποιεί τη συνολική απόδοση με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

ΚΟΣΤΟΣ	Κατάστημα			
	Κ ₁	Κ ₂	Κ ₃	Κ ₄
Πρόταση				
P_1	1	2	3	4
P_2	2	4	–	–

ΑΠΟΔΟΣΗ	Κατάστημα			
	Κ ₁	Κ ₂	Κ ₃	Κ ₄
Πρόταση				
P_1	5	8	11	17
P_2	6	12	–	–

Θέμα 2. Δίνεται μια μαρκοβιανή διαδικασία με τον παρακάτω πίνακα μεταβάσεων ενός βήματος:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας.
 (β) Για κάθε μια από τις επαναληπτικές κλάσεις να βρεθεί η κατανομή στάσιμης κατάστασης σαν να ήταν ξεχωριστή αλυσίδα.

Θέμα 3. Σε δύο κουτιά (Α και Β) τοποθετούνται 3 μαύρες και 3 άσπρες σφαίρες τυχαία, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει 3 σφαίρες. Σε κάθε βήμα επιλέγεται στην τύχη μια σφαίρα από το κουτί Α και μια από το κουτί Β και ανταλλάσσονται. Έστω X_t ο αριθμός των άσπρων σφαιρών στο κουτί Α αμέσως μετά το βήμα t .

- (α) Ναδειχθεί ότι η $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα και να προσδιοριστεί ο πίνακας και το διάγραμμα μεταβάσεων ενός βήματος.
 (β) Ναδειχθεί ότι η μαρκοβιανή αλυσίδα του μέρους (α) είναι εργοδική και να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.
 (γ) Έστω ότι σε κάθε βήμα υπάρχει ένα κέρδος ίσο με 2 ευρώ για κάθε άσπρη μπάλα και κόστος 1 ευρώ για κάθε μαύρη μπάλα στο κουτί Α. Να βρεθεί το μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

Θέμα 4. Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα συναλλαγής με την εφορία. Κάθε χρόνο πρέπει να αποφασίσετε αν θα δηλώσετε ένα συγκεκριμένο κομμάτι του εισοδήματός σας στην εφορία. Αν δηλώσετε θα πληρώσετε φόρο 90 €. Αν δεν το δηλώσετε και η εφορία ελέγξει τη δήλωσή σας, θα πληρώσετε (μαζί με τα πρόστιμα) 200 €. Η εφορία κάθε χρόνο χωρίζει τους φορολογούμενους σε τρεις κατηγορίες, αυτούς που οι δηλώσεις τους δεν ελέγχθηκαν την προηγούμενη χρονιά, αυτούς που οι δηλώσεις τους ελέγχθηκαν και βρέθηκαν σωστές, και αυτούς που οι δηλώσεις τους ελέγχθηκαν και βρέθηκε να μην έχει δηλωθεί το συγκεκριμένο εισόδημα. Η εφορία έχει την πολιτική να ελέγχει ποσοστό 50% από τις δηλώσεις της πρώτης κατηγορίας, 30% από αυτές της δεύτερης και 70% από αυτές της τρίτης. Υποθέτουμε ότι γνωρίζετε αυτές τις πιθανότητες, όπως επίσης και το αν η δήλωσή σας έχει ελεγχθεί κάθε χρόνο. Θέλετε να βρείτε μια πολιτική δήλωσης ή μη του εισοδήματος κάθε χρόνο που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά έτος.

- (α) Να οριστεί ένα μοντέλο μαρκοβιανής διαδικασίας αποφάσεων για το παραπάνω πρόβλημα.
 (β) Να βρεθεί το μέσο κόστος ανά έτος για την πολιτική που δηλώνει πάντα το εισόδημα.