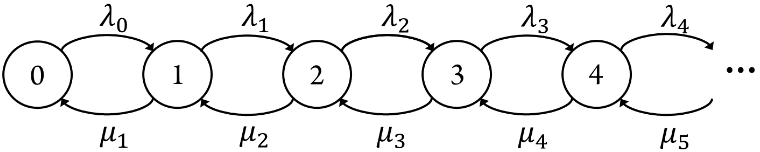
Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Ορισμός

- Σύστημα εξυπηρέτησης όπου $\{Q(t)\}$ Μ.α.σ.χ = Μαρκοβιανή ουρά.
- Σύστημα εξυπηρέτησης όπου $\{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης - ϑανάτου = Απλή Μαρκοβιανή ουρά.



- λ_i: Ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν i πελάτες.
- μ_i: Ρυθμός αναχωρήσεων όταν υπάρχουν i πελάτες.

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών

- Το σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

- Όταν είναι ευσταθές, κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών (σε συνεχή χρόνο):

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0, \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Ρυθμοί αφίξεων/αναχωρήσεων, Εμφυτευμένες κατανομές

- Ρυθμοί αφίξεων, αναχωρήσεων:

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n, \quad \mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n.$$

- Κατανομή ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων:

$$a_n = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}.$$

- Κατανομή ισορροπίας σε στιγμές αναχωρήσεων:

$$d_n = \frac{\mu_{n+1} p_{n+1}}{\lambda^*}.$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Χρόνος παραμονής πελάτη

- S: Χρόνος παραμονής πελάτη υπό την πειθαρχία FCFS.
- Q^-: Πλήθος πελατών που βρίσκει ο πελάτης κατά την άφιξή του.
- Τότε:

$$F_S(x) \quad = \quad \Pr[S \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pr[S \leq x | Q^- = n]$$

- Για τη μέση τιμή, από N. Little:

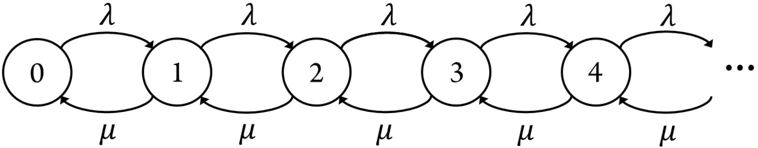
$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda}.$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Κύκλος απασχόλησης (λειτουργίας)

- I: Περίοδος αργίας.
- Y: Περίοδος συνεχούς λειτουργίας.
- $Z = Y + I$: Κύκλος απασχόλησης (λειτουργίας).
- $E[I] = \frac{1}{\lambda_0}$.
- $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda_0 p_0}$.
- $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1-p_0}{\lambda_0 p_0}$.

Η M/M/1 ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ.
- $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- 1 υπηρέτης.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών:



Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- Ευστάθεια:
  Ευσταθής $\Leftrightarrow \rho < 1$ (από ευστάθεια G/G/1 ουράς).
- Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας:

$$
\begin{aligned}
B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} & \text{αν } \rho < 1 \text{ (ευστάθεια)} \\ \infty & \text{αν } \rho \geq 1 \text{ (αστάθεια)}. \end{cases} \\
p_n &= \begin{cases} B & \text{αν } n = 0 \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1 \end{cases} \\
&= (1-\rho)\rho^n, \; n \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Άρα $(p_n) \sim \mathrm{Geom}(\rho)$ στο $\mathbb{N}_0$.

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- PASTA+Ιδιότητα μεμονωμένων αφίξεων/αναχωρήσεων: $(d_n) = (a_n) = (p_n)$.
- Μέσο πλήθος πελατών:

$$E[Q^+] = E[Q^-] = E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

(από N. Little ή $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$).

- Μέσος χρόνος παραμονής/αναμονής πελάτη:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \quad E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- Κατανομή χρόνου παραμονής πελάτη:

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr[S \le x] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^- = n] \Pr[S \le x | Q^- = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_0^x \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} du \\ &= \int_0^x \mu(1-\rho) e^{-\mu u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu\rho u)^n}{n!} du \\ &= \int_0^x \mu(1-\rho) e^{-\mu u} e^{\mu\rho u} du = \int_0^x \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)u} du \end{aligned}$$

- Άρα $S \sim \mathrm{Exp}(\mu(1-\rho)) = \mathrm{Exp}(\mu - \lambda)$.

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- I: Περίοδος αργίας.
- Y: Περίοδος συνεχούς λειτουργίας.
- $Z = Y + I$: Κύκλος απασχόλησης (λειτουργίας).
- $E[I] = \frac{1}{\lambda}$.
- $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$.
- $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$.
- Παράδοξο: $E[Y] = E[S] = \frac{1}{\mu-\lambda}$.
  Μια πρώτη σκέψη θα έλεγε ότι το $E[Y]$ θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερο από το $E[S]$, αφού κάθε περίοδος συνεχούς λειτουργίας είναι μεγαλύτερη από τον χρόνο παραμονής κάθε πελάτη μέσα σε αυτή.

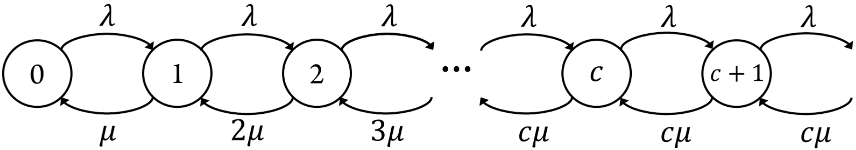
Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- Σε μια ευσταθή M/M/1 ουρά ποιο είναι το ποσοστό των κύκλων απασχόλησης στους οποίους εξυπηρετείται μόνο ένας πελάτης;
- Είναι

$$\Pr[\mathrm{Exp}(\mu) < \mathrm{Exp}(\lambda)] = \frac{\mu}{\lambda + \mu} > \frac{\mu}{\mu + \mu} = \frac{1}{2}.$$

Η M/M/c ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ.
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών:



Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Ευστάθεια:
  Ευσταθής $\Leftrightarrow \rho < c$ (από ευστάθεια G/G/c ουράς).
- Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας:

$$
\begin{aligned}
B^{-1} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\sum_{n=0}^{c}\frac{\rho^n}{n!}+\sum_{n=c+1}^{\infty}\frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}\\
&= \begin{cases} \sum_{n=0}^{c}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}\frac{\rho}{\rho-c} & \text{αν } \rho<c \text{ (ευστάθεια)},\\ \infty & \text{αν } \rho\geq c \text{ (αστάθεια)}.\end{cases}\\
p_n &= \begin{cases} B\frac{\rho^n}{n!} & \text{αν } 0\leq n\leq c,\\ B\frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} & \text{αν } n\geq c+1.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Πιθανότητα καθυστέρησης πελάτη:

$$\begin{aligned} C(c,\rho) &= \sum_{n=c}^{\infty} a_n = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \Pr[Q \geq c] = B\frac{\rho^c}{c!}\frac{c}{c-\rho} \\ &= \frac{\frac{\rho^c}{c!}\frac{c}{c-\rho}}{\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^c}{c!}\frac{c}{c-\rho}} \end{aligned}$$

τύπος καθυστερήσεων του Erlang ή τύπος Erlang C (Erlang C formula).

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Κατανομή ισορροπίας πελατών στον χώρο αναμονής, δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες είναι απασχολημένοι:

$$\begin{aligned}\Pr[Q_q = n | Q \geq c] &= \Pr[Q = n + c | Q \geq c] \\ &= \frac{B \frac{\rho^{c+n}}{c! c^n}}{\sum_{m=c}^{\infty} B \frac{\rho^m}{c! c^{m-c}}} \\ &= \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{\rho}{c}\right)^n, \; n \geq 0,\end{aligned}$$

- Άρα $(Q_q | Q \geq c) \sim \mathrm{Geom}(\frac{\rho}{c})$ στο $\mathbb{N}_0$.
- Επομένως:

$$E[Q_q | Q \geq c] = \frac{\rho/c}{1 - \rho/c}.$$

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά:

$$\begin{aligned} E[Q_q] &= \Pr[Q < c]E[Q_q|Q < c] + \Pr[Q \geq c]E[Q_q|Q \geq c] \\ &= \Pr[Q < c] \cdot 0 + \Pr[Q \geq c] \cdot \frac{\rho/c}{1-\rho/c} \\ &= B\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}. \end{aligned}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα:

$$E[Q] = B\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} + \rho.$$

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Μέσο χρόνο αναμονής πελάτη:

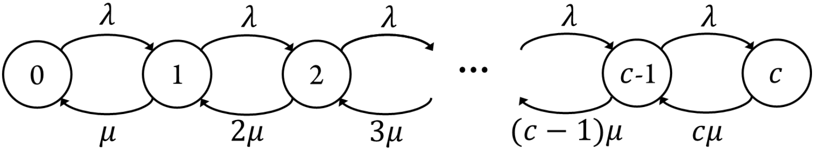
$$E[W] = \frac{E[Q_q]}{\lambda} = B\frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2}\frac{1}{\mu}.$$

- Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη:

$$E[S] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \left(B\frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1\right)\frac{1}{\mu}.$$

Η M/M/c/c ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ.
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- c χωρητικότητα (καθόλου χώρος αναμονής).
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών:



Η M/M/c/c ουρά (συνέχεια)

- Ευστάθεια:Πάντα ευσταθής λόγω πεπερασμένου χώρου καταστάσεων.
- Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!}, \\ p_n &= \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{m=0}^{c} \frac{\rho^m}{m!}}, \quad 0 \leq n \leq c. \end{aligned}$$

Η $M/M/c/c$ ουρά (συνέχεια)

- Πιθανότητα απώλειας πελάτη:

$$B(c,\rho) = a_c = p_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{m=0}^{c} \frac{\rho^m}{m!}}$$

  τύπος απωλειών του Erlang ή Erlang B (Erlang B formula).
- Ο τύπος αυτός ισχύει και για το $M/G/c/c$ σύστημα (ιδιότητα μη-ευαισθησίας).

Η M/M/c ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ.
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Κάθε αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα αναχωρεί άμεσα με πιθανότητα q_n.
- Συνήθως: $q_n \uparrow n$ και $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$.
- $\{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda(1-q_n), \quad n \geq 0, \\ \mu_n &= \min(n,c)\mu, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Η M/M/c ουρά με ανυπόμονους πελάτες

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ.
- $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Κάθε αφικνούμενος πελάτης εισέρχεται σε αυτό αλλά έχει έναν χρόνο υπομονής $\text{Exp}(\theta)$ και αποχωρεί από το σύστημα αν ο χρόνος εκπνεύσει πριν να αρχίσει την εξυπηρέτησή του.
- $\{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda, \quad n \geq 0, \\ \mu_n &= \min(n,c)\mu + \max(n-c,0)\theta, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Σύγκριση M/M/c και αντίστοιχων M/M/c συστημάτων

- Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μια ουρά για κάθε υπηρέτη;
- Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες;

Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μια ουρά για κάθε υπηρέτη;

- Πρόκειται να σχεδιάσουμε σύστημα εξυπηρέτησης με c όμοιους υπηρέτες.
- Είναι προτιμότερο να έχουμε ξεχωριστή ουρά για κάθε υπηρέτη ή μια κοινή ουρά για όλους (pooling);
- Συγκεκριμένο πλαίσιο:
  Poisson διαδικασία αφίξεων.
  2 διαθέσιμοι υπηρέτες με $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης.
  Απεριόριστη χωρητικότητα.
- Σύστημα 1: Δυο παράλληλες M/M/1 ουρές με ρυθμό αφίξεων $\frac{\lambda}{2}$ και ρυθμό μ εξυπηρέτησης έκαστη.
- Σύστημα 2: Μια M/M/2 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ.

Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μια ουρά για κάθε υπηρέτη; (συνέχεια)

- Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.
- Σύστημα 1: Δυο παράλληλες M/M/1 ουρές με ρυθμό αφίξεων $\frac{\lambda}{2}$ και ρυθμό μ έκαστη. Μέσος χρόνος παραμονής:

$$E[S_1] = \frac{1}{\mu - \frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{\mu(2-\rho)}.$$

- Σύστημα 2: Μια M/M/2 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό μ. Μέσος χρόνος παραμονής:

$$E[S_2] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μια ουρά για κάθε υπηρέτη; (συνέχεια)

- Έχουμε

$$\begin{aligned} E[S_1] - E[S_2] &= \frac{2}{\mu(2-\rho)} - \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{2\rho}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} > 0. \end{aligned}$$

- Συμπέρασμα: Προτιμότερο να υπάρχει μια κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.
- Το ίδιο ισχύει και για τον χρόνο αναμονής στην ουρά, αφού έχουμε $E[W_i] = E[S_i] - \frac{1}{\mu}$, $i = 1, 2$, οπότε

$$E[W_1] - E[W_2] = E[S_1] - E[S_2] > 0.$$

Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μια ουρά για κάθε υπηρέτη; (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$\lim_{\rho\to 2^-}(E[S_1]-E[S_2]) \quad = \quad \lim_{\rho\to 2^-}\frac{2\rho}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}=\infty,$$

δηλαδή η κοινή ουρά μειώνει σημαντικά τον μέσο χρόνο παραμονής σε συστήματα με ρυθμό συνωστισμού κοντά στην κρίσιμη τιμή για αστάθεια.

- Επίσης:

$$\frac{E[S_2]}{E[S_1]}=\frac{2}{2+\rho}\in\left(\frac{1}{2},1\right), \quad \rho\in(0,2),$$

δηλαδή η κοινή ουρά μειώνει στο μισό τον χρόνο παραμονής για ρυθμό συνωστισμού κοντά στην κρίσιμη τιμή για αστάθεια.

Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μια ουρά για κάθε υπηρέτη; (συνέχεια)

- Η χρήση κοινής ουράς (pooling) βελτιώνει την απόδοση του συστήματος σε πολύ γενικότερες καταστάσεις.
- Η χρήση κοινής ουράς έχει υιοθετηθεί σε πολλές πρακτικές εφαρμογές των ουρών σε πραγματικά συστήματα τα τελευταία χρόνια.
- Αν οι πελάτες είναι ετερογενείς μπορεί να είναι προτιμότερο να έχουμε διαφορετικές ουρές για διαφορετικές κατηγορίες πελατών.
- Αν οι υπηρέτες δεν είναι όμοιοι, το ερώτημα θα πρέπει να εξεταστεί εξαρχής με προσοχή.

Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες;

- Πρόκειται να σχεδιάσουμε σύστημα εξυπηρέτησης με συγκεκριμένη δυναμικότητα (συνολικό ρυθμό) εξυπηρέτησης.
- Είναι προτιμότερο να έχουμε έναν υπηρέτη με όλη τη δυναμικότητα ή να τη μοιράσουμε σε περισσότερους;
- Συγκεκριμένο πλαίσιο:
  Poisson διαδικασία αφίξεων.
  Δυνατότητα για έναν υπηρέτη με $\mathrm{Exp}(2\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης ή δυο υπηρετών με $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης.
- Σύστημα 1: $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης 2μ.
- Σύστημα 2: $M/M/2$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ ανά υπηρέτη.

Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες; (συνέχεια)

- Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.
- Σύστημα 1: M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης 2μ. Μέσος χρόνος παραμονής:

$$E[S_1] = \frac{1}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(2-\rho)}.$$

- Σύστημα 2: M/M/2 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ ανά υπηρέτη. Μέσος χρόνος παραμονής:

$$E[S_2] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες; (συνέχεια)

- Έχουμε

$$\begin{aligned} E[S_1]-E[S_2] &= \frac{1}{\mu(2-\rho)}-\frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{\rho-2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}=-\frac{1}{\mu(2+\rho)}<0. \end{aligned}$$

- Συμπέρασμα: Προτιμότερο να ανατεθεί όλη η δυναμικότητα σε έναν υπηρέτη, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες; (συνέχεια)

- Εδώ:

$$\frac{E[S_1]}{E[S_2]} = \frac{\rho+2}{4} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \rho \in (0,2),$$

  δηλαδή η ανάθεση όλης της δυναμικότητας εξυπηρέτησης σε έναν υπηρέτη βελτιώνει σημαντικά την λειτουργία του συστηματος όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής συνωστισμού.
- Συγκεκριμένα οδηγεί σε μείωση του μέσου χρόνου παραμονής των πελατών με ένα συντελεστή που φθάνει κοντά στο $\frac{1}{2}$ για μικρές τιμές του ρυθμού συνωστισμού.

Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες; (συνέχεια)

- Για τους χρόνους αναμονής έχουμε:
  Για την M/M/1 ουρά:

$$E[W_1] = E[S_1] - \frac{1}{2\mu} = \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)},$$

  ενώ για την M/M/2 ουρά:

$$E[W_2] = E[S_2] - \frac{1}{\mu} = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Πολλοί αργοί ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες; (συνέχεια)

- Επομένως:

$$\begin{aligned} E[W_1] - E[W_2] &= \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)} - \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{\rho}{2\mu(2+\rho)} > 0. \end{aligned}$$

- Προτιμότερο να μοιραστεί η δυναμικότητα εξυπηρέτησης σε δυο υπηρέτες, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο αναμονής ενός πελάτη στην ουρά.
- Ισχύει το αντίθετο από αυτό που είδαμε για τον χρόνο παραμονής.