

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Περιγραφή

- Κάτοχος δικαιώματος αγοράς 1 μετοχής σε τιμή c εντός N περιόδων.
- X_n : τιμή της μετοχής όταν απομένουν n περίοδοι.
- Μοντέλο διακύμανσης τιμής μετοχής \rightarrow Τυχαίος περίπατος:

$$X_n = X_{n+1} + Y_n, \quad Y_n \sim F(y) \text{ ανεξ.}$$

- Αφού γίνει γνωστή η τρέχουσα τιμή της μετοχής, παίρνεται η απόφαση για το αν το δικαίωμα αγοράς θα ασκηθεί ή όχι.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση αναμενόμενου κέρδους (τιμή μετοχής πλην c).

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: Ο συνολικός αριθμός ημερών, N , για την άσκηση του δικαιώματος.
- Στάδιο: Ο αριθμός των ημερών, n , που απομένουν για να εξασκηθεί το δικαίωμα.
- Κατάσταση: Η τρέχουσα τιμή της μετοχής, x , στην αρχή μιας ημέρας.
- Απόφαση: Η άσκηση ή όχι του δικαιώματος.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος, $v_n(x)$, όταν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι x και το δικαίωμα εκπνέει σε n ημέρες.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$v_0(x) = \max[x - c, 0],$$

$$v_n(x) = \max \left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x + y) dF(y) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης

- Εικασία 1: $v_n(x) \uparrow n$ (με επαγωγή).
Περισσότερες μέρες για την άσκηση του δικαιώματος \rightarrow
Μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος.
- Εικασία 2: $v_n(x) \uparrow x$ (με επαγωγή).
Μεγαλύτερη τρέχουσα τιμή μετοχής \rightarrow Μεγαλύτερο
αναμενόμενο κέρδος.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης (συνέχεια)

- Εικασία 3: Για κάθε στάδιο n υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός x_n^* τέτοιος ώστε για $x < x_n^*$ να είναι προτιμότερο να μην ασκήσουμε το δικαίωμα, ενώ για $x \geq x_n^*$ να είναι προτιμότερο να ασκήσουμε το δικαίωμα.

Καθώς είναι βέλτιστο

να ασκήσουμε το δικαίωμα αν $v_n(x) = x - c$ και

να μην το ασκήσουμε όταν $v_n(x) > x - c$,

πρέπει να δείξουμε ότι

$$v_n(x) - x = \begin{cases} > -c & \text{αν } x < x_n^*, \\ = -c & \text{αν } x \geq x_n^*. \end{cases}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης (συνέχεια)

- Εικασία 3': Αρκεί να αποδείξουμε ότι $v_n(x) - x \downarrow x$ (με επαγωγή).
Μεγαλύτερη τιμή $x \rightarrow$ Μικρότερη διαφορά απόδοσης μεταξύ βέλτιστης άσκησης του δικαιώματος και άμεσης άσκησης του δικαιώματος.
- Εικασία 4: $x_n^* \uparrow n$ (με επαγωγή).
Περισσότερες μέρες για την άσκηση του δικαιώματος \rightarrow Μεγαλύτερη προθυμία για αναμονή στην άσκηση του δικαιώματος.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 1

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) \uparrow n$ για κάθε σταθερό x .
- Για $n = 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \max \left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} \max(x + y - c, 0) dF(y) \right] \\ &\geq \max \left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} 0 dF(y) \right] = v_0(x). \end{aligned}$$

- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$, δηλ.
 $v_{n-1}(x) \geq v_{n-2}(x)$, για κάθε x . Τότε:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \max \left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x + y) dF(y) \right] \\ &\geq \max \left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-2}(x + y) dF(y) \right] = v_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 2

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) \uparrow x$ για κάθε σταθερό n .
- Για $n = 0$ ισχύει: $v_0(x) = \max[x - c, 0] \uparrow x$.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$: $v_{n-1}(x) \uparrow x$. Τότε:

$$\begin{aligned}
 x \leq x' &\Rightarrow \begin{cases} x - c \leq x' - c, \\ v_{n-1}(x + y) \leq v_{n-1}(x' + y), y \in \mathbb{R} \end{cases} \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x + y) dF(y) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x' + y) dF(y) \\
 \Rightarrow v_n(x) = \max \left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x + y) dF(y), 0 \right] \\
 &\leq \max \left[x' - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x' + y) dF(y) \right] = v_n(x').
 \end{aligned}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 3

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) - x \downarrow x$, για κάθε n .
- Για $n = 0$ ισχύει: $v_0(x) - x = \max[-c, -x] \downarrow x$.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε:

$$\begin{aligned}
 v_n(x) - x &= \max \left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y) dF(y) - x \right] \\
 &= \max \left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} (v_{n-1}(x+y) - (x+y)) dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y) \right] \\
 &= \max \left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} (v_{n-1}(x+y) - (x+y)) dF(y) + E[X] \right].
 \end{aligned}$$

- $v_{n-1}(x+y) - (x+y) \downarrow x$ για κάθε $y \Rightarrow v_n(x) - x \downarrow x$.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Θα δείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική υπαγορεύει την άσκηση του δικαιώματος στο στάδιο n εφόσον η τιμή x στο στάδιο n είναι \geq από κατώφλι x_n^* .
- Έστω n . Αφού η συνάρτηση $v_n(x) - x$ είναι φθίνουσα, υπάρχουν δυο περιπτώσεις:
 - ① Αν $v_n(x) - x > -c$ για κάθε x , τότε είναι βέλτιστο πάντα να μην ασκηθεί το δικαίωμα και επομένως $x_n^* = \infty$.
 - ② Στην άλλη περίπτωση υπάρχει κάποιο $x < \infty$ ώστε $v_n(x) - x \leq c$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $x_n^* = \inf\{x : v_n(x) - x \leq -c\} < \infty$.
- $v_n(x) - x \downarrow x$, ορισμός $x_n^* \Rightarrow$
 $(x \geq x_n^* \Leftrightarrow v_n(x) - x \leq -c)$ και επομένως είναι βέλτιστο να ασκηθεί το δικαίωμα αν $x \geq x_n^*$.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 4

- Θα δείξουμε ότι $x_n^* \uparrow n$.
- Έχουμε:

$$v_n(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \leq v_{n+1}(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \leq -c.$$

- Η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας της $v_n(x)$ ως προς n .
- Η δεύτερη ισχύει από τον ορισμό του x_{n+1}^* .
- Τότε, λόγω της μονοτονίας της $v_n(x) - x$ ως προς x έχουμε $v_n(x) - x \leq -c$ για κάθε $x \geq x_{n+1}^*$.
- Άρα:

$$x_n^* = \inf\{x : v_n(x) - x \leq -c\} \leq x_{n+1}^*.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Περιγραφή

- Ένας διευθυντής εξετάζει το πολύ N υποψηφίους για την επιλογή ενός για θέση γραμματέως.
- Το N είναι προαποφασισμένο.
- Οι υποψήφιοι μπορούν να διαταχθούν από τον καλύτερο (1ης τάξης) ως τον χειρότερο (N ης τάξης). Δεν υπάρχουν ισοδύναμοι.
- Η σειρά εξέτασης των υποψηφίων είναι τυχαία.
- Μετά τη συνέντευξη ενός υποψηφίου, ο διευθυντής γνωρίζει τη σχετική διάταξή του σε σχέση με όλους τους προηγούμενους.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Περιγραφή (συνέχεια)

- Μετά τη συνέντευξη, ο διευθυντής αποφασίζει αν θα προσλάβει τον υποψήφιο ($a = 1$) ή όχι ($a = 0$).
- Αν προσληφθεί ένας υποψήφιος η διαδικασία συνεντεύξεων σταματά.
- Η απόφαση της πρόσληψης ή της απόρριψης δεν είναι δυνατόν να ανακληθεί αργότερα.
- Στόχος του διευθυντή είναι να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα πρόσληψης στη θέση του καλύτερου υποψηφίου από τους N .

Το πρόβλημα του γραμματέως - Μοντελοποίηση

- Στάδιο: Ο αριθμός των υπόλοιπων υποψηφίων, n , που είναι διαθέσιμοι για συνέντευξη, εξαιρουμένου του υποψηφίου που μόλις έχει εξεταστεί (του $(N - n)$ -οστού υποψηφίου).
- Κατάσταση: Δίτιμη μεταβλητή x , που να παίρνει τις τιμές 1 (αν ο τελευταίος υποψήφιος ήταν ο καλύτερος μέχρι στιγμής) ή 0 (αν δεν ήταν).
- Απόφαση: Να προσλάβει ή να απορρίψει τον τελευταίο υποψήφιο. Βεβαίως, αν $x = 0$, ο υποψήφιος πρέπει να απορριφθεί.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη πιθανότητα, $v_n(x)$, να επιλεγεί ο καλύτερος από όλους τους υποψηφίους, δεδομένου ότι η κατάσταση είναι x και απομένουν n ακόμη υποψήφιοι.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_0(x)$

- Αν ο τελευταίος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τώρα υποψηφίους, τότε ο διευθυντής προσλαμβάνοντάς τον έχει επιλέξει τον καλύτερο υποψήφιο (με πιθανότητα 1).
- Αν όχι, τότε του απομένει να επιλέξει αυτόν τον υποψήφιο που σίγουρα δεν είναι ο καλύτερος:

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x)$, $n \geq 1$, χρήσιμες ποσότητες

- Η πιθανότητα στο στάδιο n η κατάσταση να είναι 1 είναι

$$\frac{1}{N - n},$$

δηλαδή ο τρέχων υποψήφιος να είναι ο καλύτερος από τους $N - n$ που έχουν εξεταστεί.

- Η πιθανότητα στο στάδιο n , ο υποψήφιος να είναι ο καλύτερος όλων των N υποψηφίων δεδομένου ότι είναι ο καλύτερος από τους $N - n$ που έχουν εξεταστεί είναι

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{o } (N - n)\text{-οστός υποψήφιος είναι ο καλύτερος όλων} \\ & \quad \text{[είναι ο καλύτερος μεταξύ των πρώτων } N - n]] \\ &= \frac{1/N}{1/(N - n)} = \frac{N - n}{N}. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(0)$, $n \geq 1$

- Έστω ότι είμαστε στο στάδιο n .
- Αν $x = 0$, και επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος τότε η πιθανότητα να επιτύχει ο διευθυντής τον στόχο του είναι 0.
- Αν $x = 0$, και δεν επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η επόμενη κατάσταση στο στάδιο $n - 1$ είναι η 1, αν ο επόμενος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τότε $N - (n - 1)$ υποψηφίους. Άρα:

$$\begin{aligned}
 v_n(0) &= \max \left[0, \frac{1}{N - n + 1} v_{n-1}(1) + \frac{N - n}{N - n + 1} v_{n-1}(0) \right] \\
 &= \frac{1}{N - n + 1} v_{n-1}(1) + \frac{N - n}{N - n + 1} v_{n-1}(0).
 \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(1)$, $n \geq 1$

- Έστω ότι είμαστε στο στάδιο n .
- Αν $x = 1$, και επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η πιθανότητα να επιτύχει ο διευθυντής τον στόχο του είναι η πιθανότητα ο τρέχων υποψήφιος να είναι ο καλύτερος όλων, δηλαδή $\frac{N-n}{N}$.
- Αν $x = 1$, και δεν επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η επόμενη κατάσταση στο στάδιο $n - 1$ είναι η 1, αν ο επόμενος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τότε $N - (n - 1)$ υποψηφίους. Άρα:

$$\begin{aligned} v_n(1) &= \max \left[\frac{N-n}{N}, \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0) \right] \\ &= \max \left[\frac{N-n}{N}, v_n(0) \right]. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής - σύνοψη

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

$$v_n(0) = \frac{1}{N - n + 1} v_{n-1}(1) + \frac{N - n}{N - n + 1} v_{n-1}(0), \\ n = 1, 2, \dots, N,$$

$$v_n(1) = \max \left[\frac{N - n}{N}, v_n(0) \right], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Ιδιότητες συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Ιδιότητα 1: Η κατάσταση 1 είναι προτιμώτερη της 0 για όλα τα στάδια, δηλαδή,

$$v_n(1) \geq v_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

- Ιδιότητα 2: Η $v_n(0)$ είναι αύξουσα ως προς n , δηλαδή,

$$v_{n-1}(0) \leq v_n(0), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

- Ιδιότητα 3: Ισχύει ότι

$$v_n(0) = (N-n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(N-j-1)(N-j)} v_j(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 1 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η σχέση $v_n(1) \geq v_n(0)$ είναι άμεση αφού:

$$v_n(1) = \max \left[\frac{N-n}{N}, v_n(0) \right] \geq v_n(0).$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 2 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η σχέση $v_{n-1}(0) \leq v_n(0)$ συνάγεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης σε συνδυασμό με την ιδιότητα 1:

$$\begin{aligned}v_n(0) &= \frac{1}{N-n+1}v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1}v_{n-1}(0) \\ &\geq \frac{1}{N-n+1}v_{n-1}(0) + \frac{N-n}{N-n+1}v_{n-1}(0) \\ &= v_{n-1}(0).\end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 3 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Για την ιδιότητα 3 χρησιμοποιούμε αναδρομικά την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned}
 v_n(0) &= \frac{1}{N - (n - 1)} v_{n-1}(1) + \frac{N - n}{N - (n - 1)} v_{n-1}(0) \\
 &= \frac{1}{N - (n - 1)} v_{n-1}(1) + \frac{N - n}{N - (n - 1)} \cdot \frac{1}{N - (n - 2)} v_{n-2}(1) \\
 &\quad + \frac{N - n}{N - (n - 1)} \cdot \frac{N - (n - 1)}{N - (n - 2)} v_{n-2}(0) \\
 &= \dots \\
 &= \frac{N - n}{(N - n)(N - (n - 1))} v_{n-1}(1) \\
 &\quad + \frac{N - n}{(N - (n - 1))(N - (n - 2))} v_{n-2}(1) \\
 &\quad + \frac{N - n}{(N - (n - 2))(N - (n - 3))} v_{n-3}(1) + \dots + \frac{N - n}{(N - 1)N} v_0(1).
 \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Έστω n^* τέτοιο ώστε

$$n^* = \max \left\{ n = 1, 2, \dots, t-1 : \frac{t-n}{t} \geq v_n(0) \right\}.$$

- Η βέλτιστη πολιτική έχει τη μορφή

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0, \\ 0, & \text{αν } x = 1 \text{ και } n > n^*, \\ 1, & \text{αν } x = 1 \text{ και } n \leq n^*, \end{cases}$$

δηλαδή απορρίπτει τους υποψηφίους μέχρι να απομείνουν n^* υποψήφιοι και κατόπιν επιλέγεται ο πρώτος που είναι καλύτερος μεταξύ αυτών που έχουν ήδη περάσει.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη μορφής βέλτιστης πολιτικής

- Έχουμε

$$v_n(1) = \max \left[\underbrace{\frac{N-n}{N}}_{\downarrow n}, \underbrace{v_n(0)}_{\uparrow n} \right].$$

- $\frac{N-n}{N} \downarrow n$ και $v_n(0) \uparrow n \Rightarrow$
Υπάρχει n^* τέτοιο ώστε $\frac{N-n}{t} \geq v_n(0)$ για $n \leq n^*$,
 $\frac{N-n}{t} < v_n(0)$ για $n > n^*$.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Για να βρούμε το n^* , πρέπει να υπολογίζουμε το $v_n(0)$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ και σε κάθε βήμα να συγκρίνουμε το $\frac{N-n}{N}$ με το $v_n(0)$, μέχρι βρούμε ένα n^* ώστε

$$\frac{N - n^*}{N} \geq v_{n^*}(0) \text{ αλλά}$$

$$\frac{N - (n^* + 1)}{N} < v_{n^*+1}(0).$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Για τον υπολογισμό του $v_n(0)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$v_n(0) = \frac{N-n}{N} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1}, \quad n \leq n^* + 1.$$

- Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 3 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για $n \leq n^* + 1$ και $j = 0, 1, \dots, n-1$ είναι $v_j(1) = \frac{N-j}{N}$, οπότε

$$v_n(0) = (N-n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(N-j-1)(N-j)} \underbrace{v_j(1)}_{\frac{N-j}{N}}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Από τον τύπο που μόλις αποδείχθηκε έχουμε

$$v_{n^*}(0) = \frac{N - n^*}{N} \sum_{j=0}^{n^*-1} \frac{1}{N - j - 1},$$

$$v_{n^*+1}(0) = \frac{N - n^* - 1}{t} \sum_{j=0}^{n^*} \frac{1}{N - j - 1}.$$

- Το κατώφλι n^* χαρακτηρίζεται από τις ανισότητες $\frac{N-n^*}{N} \geq v_{n^*}(0)$ και $\frac{N-(n^*+1)}{N} < v_{n^*+1}(0)$, που δίνουν

$$\sum_{j=0}^{n^*-1} \frac{1}{N - j - 1} \leq 1 < \sum_{j=0}^{n^*} \frac{1}{N - j - 1}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Η συνάρτηση $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1}$ είναι αύξουσα ως προς n .
- Το κατώφλι n^* που προσδιορίζει τη βέλτιστη πολιτική είναι το

$$n^* = \max \left\{ n = 1, 2, \dots, N - 1 : \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N - j - 1} \leq 1 \right\}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός βέλτιστης πιθανότητας επιλογής

- Η πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου υπό τη βέλτιστη πολιτική είναι $v_{n^*+1}(0)$.
- Πράγματι, στο στάδιο $n^* + 1$ το βέλτιστο είναι να απορριφθεί ο τρέχων υποψήφιος, ανεξάρτητα αν είναι ο καλύτερος ως τότε ή όχι και από κει και πέρα να ακολουθηθεί η βέλτιστη πολιτική.
- Άρα: Η μέγιστη πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου στο πρόβλημα του γραμματέως είναι

$$p_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n^*(N)} \frac{N - n^*(N) - 1}{N - j - 1},$$

όπου $n^*(N)$ το βέλτιστο κατώφλι για την επιλογή του καλύτερου υποψηφίου μεταξύ N υποψηφίων.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός βέλτιστης πιθανότητας επιλογής

- Έχουμε

N	2	3	4	5	6	7	8	9
p_N	0.5	0.5	0.4583	0.4333	0.4277	0.4142	0.4098	0.4059

- Ασυμπτωτικά:

Το μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που πρέπει να απορρίπτεται πριν επιλεγεί ο μέχρι στιγμής καλύτερος σύμφωνα με τη βέλτιστη πολιτική είναι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N - n^*(N)}{N} = \frac{1}{e}.$$

Η οριακή πιθανότητα επιλογής του βέλτιστου υποψηφίου υπό τη βέλτιστη πολιτική είναι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = \frac{1}{e}.$$