Ουρές Αναμονής 21.12.2022

μάθημα 23

Ασκήσεις - Παλιά θέματα

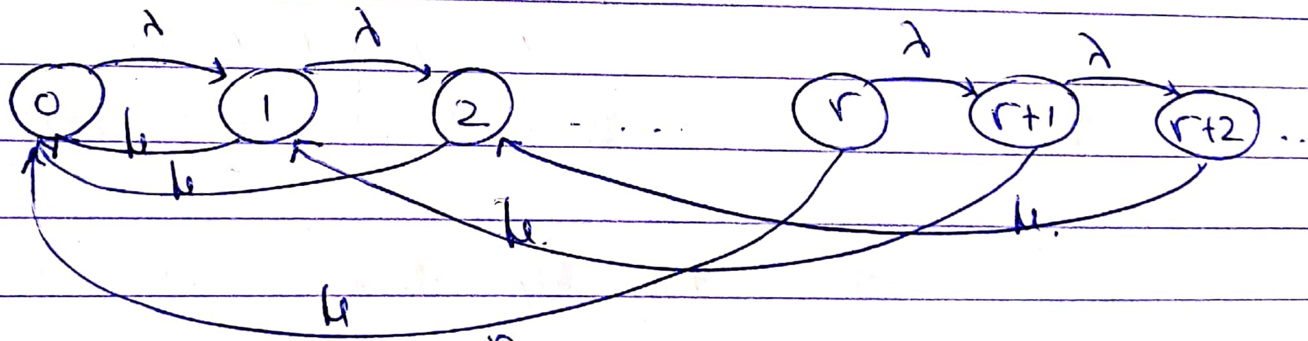
7.1 M/M/1 με ομαδικές εξυπηρετήσεις

Ρυθμός αφίξεων λ, $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

1 server, μέγεθος εξυπηρετούμενης ομάδας $= r$

Το σύστημα εξυπηρετεί ακόμη και με 1 πελάτη

$\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



$$\lambda P_0 = \mu \sum_{j=1}^{r} P_j$$

$$(\lambda+\mu)P_j = \lambda P_{j-1} + \mu P_{j+r} \quad , j \geq 1$$

Μέθοδος Πιθανογεννητριών

Αν $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad , |z| \leq 1$

$$(\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \mu \sum_{j=1}^{r} P_j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} P_{j-1} z^j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} P_{j+r} z^j$$

$$(\lambda+\mu)P(z) = \mu \sum_{j=0}^{r} P_j + \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z^r}\left(P(z) - \sum_{j=0}^{r} P_j z^j\right)$$

$$P(z) = \frac{\mu \sum_{j=0}^{r} P_j (z^r - z^j)}{(\lambda+\mu)z^r - \lambda z^{r+1} - \mu}$$

Η ανάλυση είναι όπως στην κλασική M/M/1 με ομαδικές εξυπηρετήσεις

Φεβρουάριος 2019 - Θέμα 1

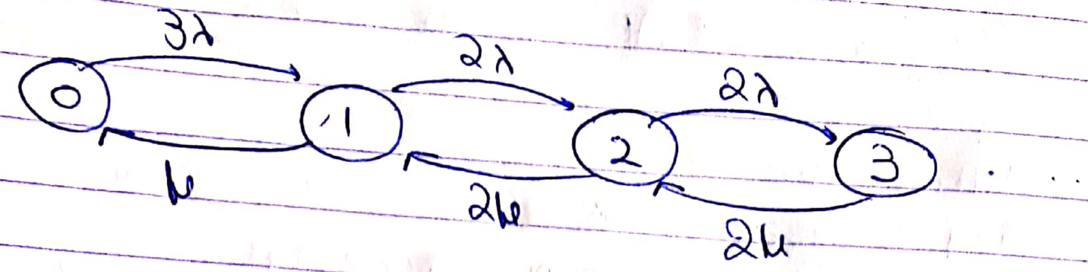
M/M/2 με:
ρυθμό αφίξεων 3λ
ρυθμό εξυπηρέτησης ανά υπηρέτη μ
πελάτες → τύπου 1 με πιθανότητα 2/3
→ τύπου 2 με πιθανότητα 1/3
Πελάτες τύπου 1: μπαίνουν πάντα
Πελάτες τύπου 2: μπαίνουν μόνο όταν το βρίσκουν κενό

1) $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ γέννησης-θανάτου, διάγραμμα
2) Συνθήκη ευστάθειας και (P_n)
3) λ^*, Μακροπρόθεσμο ποσοστό εξυπηρετούμενων
4) (q_n^{enter}): $q_n^{enter} = Pr$ [εισερχόμενος πελάτης βλέπει n]
5) $E[S^{enter}] = ?$
6) $E[Z] = ?$

① κατάσταση | επ. κατάσταση | χρόνος

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(3\lambda)$
1	2	$Exp(2\lambda)$
	0	$Exp(\mu)$
$n \geq 2$	$n+1$	$Exp(2\lambda)$
	$n-1$	$Exp(2\mu)$

Όλοι οι χρόνοι $Exp \Rightarrow \{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ



② $B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}$ $\quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 3\rho^n = \begin{cases} \frac{3\rho}{1-\rho} + 1, & \rho < 1 \\ +\infty, & \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} B, & n = 0 \\ B\,3\rho^n, & n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1+2\rho}, & n = 0 \\ \frac{3(1-\rho)}{1+2\rho}\rho^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

③

$$\lambda^* = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j = 3\lambda P_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2\lambda P_j = 3\lambda P_0 + 2\lambda \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} P_j}_{1-P_0}$$

$$\Rightarrow \lambda^* = 3\lambda P_0 + 2\lambda(1-P_0) \rightarrow$$

$$\lambda^* = 3\lambda\left(\frac{1+\rho}{1+2\rho}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \text{μακροπρόθεσμο} \\ \text{ποσοστό} \\ \text{εξυπηρετούμενων} \end{pmatrix} = \frac{\lambda^*}{3\lambda} = \frac{1+\rho}{1+2\rho}$$

Εναλλακτικά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pr[\text{μπαίνω} \mid \text{βλέπω } n]$

$$\overset{PASTA}{=} P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_n}{3} = \ldots = \frac{1+\rho}{1+2\rho}$$

(4) $$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n P_n}{\lambda^*} = \begin{cases} \dfrac{3\lambda P_0}{\lambda^*}, & n=0 \\ \dfrac{2\lambda P_n}{\lambda^*}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n^{enter} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1+\rho}, & n=0 \\ \dfrac{2(1-\rho)\rho^n}{1+\rho}, & n \geq 1 \end{cases}$$

(5) <u>Μια ιδέα</u>: $E[S^{enter}] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{enter} E[S \mid \text{είδε } n \text{ κατά την αφιξή του και μπήκε}]$

με $E[S \mid \text{είδε } n \text{ κατά την αφιξή του και μπήκε}] = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}, & n=0,1 \\ \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{(n-1)}{2\mu}, & n \geq 2 \end{cases}$

<u>Εναλλακτικά</u>:

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{3}{1+2\rho} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n}_{\frac{\rho}{1-\rho}}$$

Scanned with CamScanner

Από Little

$$\frac{\mathcal{E}[Q]}{\lambda^*} = \mathcal{E}[S^{enter}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}[S^{enter}] = \frac{n}{\mu(1-\rho^2)}$$

⑥ $\mathcal{E}[Z] = ?$

$$p_0 = \frac{\mathcal{E}[I]}{\mathcal{E}[Z]} \qquad p_0 = \frac{1-\rho}{1+2\rho} \qquad \mathcal{E}[I] = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{3\lambda}$$

$$\mathcal{E}[Z] = \frac{\mathcal{E}[I]}{p_0} \Rightarrow \mathcal{E}[Z] = \frac{1+2\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

Φεβρουάριος 2019 - Θέμα 3

α) M/M/1

ρυθμός αφίξεων λ

ρυθμός εξυπηρέτησης μ

Poisson διαδικασία καταστροφών με ρυθμό θ

καταστροφή: → απενεργοποίηση υπηρέτη

→ απομάκρυνση όλων των πελατών

χρόνος επανενεργοποίησης $Exp(\eta)$

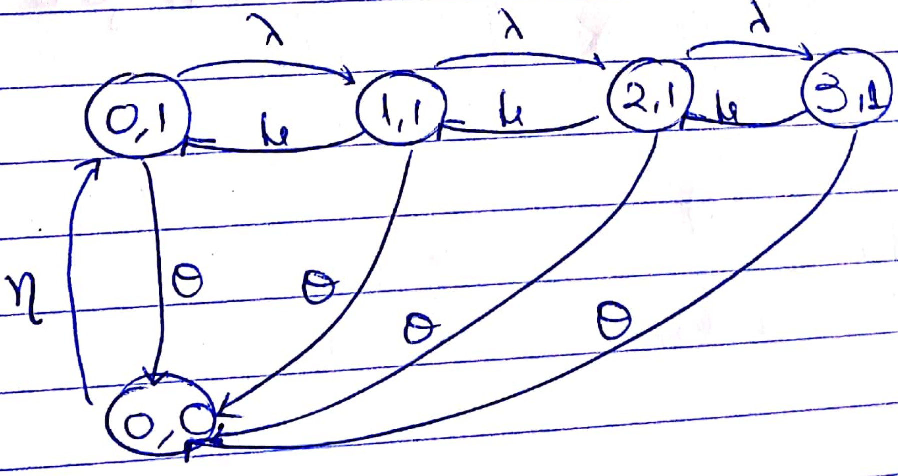
όχι νέες αφίξεις κατά την διάρκειά του

Δώστε μαρκοβιανή περιγραφή του συστήματος

$Q(t) = \#$ πελατών την στιγμή t

$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{ο υπηρέτης ενεργός} \\ 0, & \text{ο υπηρέτης ανενεργός} \end{cases}$

$\{(Q(t), I(t))\}$ χώρος καταστάσεων $\{(0,0), (n,1) : n \geq 1\}$



Β) Δίκτυο Jackson N σταθμών
Κάθε σταθμός
- 1 υπηρέτης
- Exp(μ) χρόνους εξυπηρέτησης
- άπειρη χωρητικότητα
- εξωτερική διαδικασία αφίξεων Poisson (λ)

Κάθε αναχώρηση από σταθμό πάει με πιθανότητα $\frac{1}{N}$ σε άλλο σταθμό ή με πιθανότητα $\frac{1}{N}$ στο εξωτερικό του δικτύου.

Να βρεθεί: 1) η συνθήκη ευστάθειας του δικτύου και ο μέσος αριθμός πελατών σε 1 σταθμό του δικτύου.

2) Μέσος συνολικός χρόνος παραμονής πελάτη $E[S]$
Μέσος # επισκέψεων σταθμών $E[M]$

3) Μέσος χρόνος από άφιξη πελάτη σε κενό δίκτυο μέχρι την στιγμή που το δίκτυο θα είναι ξανά κενό.

(1) Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij}$$

Λόγω συμμετρίας $\Lambda_j = \Lambda$ για όλα τα j

$$\Lambda = \lambda + (N-1)\frac{1}{N}\Lambda$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda = N\lambda$$

Συνθήκη ευστάθειας: $\Lambda < \mu \Leftrightarrow N\lambda < \mu$.

Q_j έχει την στάσιμη κατανομή μιας $M/M/1$ με ρυθμούς αφίξεων Λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ

$$\Pr[Q_j = n] = \left(1 - \frac{N\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{N\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$E[Q_j] = \frac{N\lambda}{\mu - N\lambda}.$$

(2) $E[Q] = \sum_{j=1}^{N} E[Q_j] = \dfrac{N^2\lambda}{\mu - N\lambda}$

$$\lambda_{δικτ.} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = N\lambda$$

Από Little $E[S] = \dfrac{E[Q]}{\lambda_{δικτ.}} = \dfrac{N}{\mu - N\lambda}$

$Pr[M=n] = Pr\left[\begin{matrix}\text{επισκέπτεται άλλο} \\ \text{σταθμό μετά τον } 1^{ο}\end{matrix}, \ldots, \begin{matrix}\text{επισκέπτεται} \\ \text{σταθμό μετά τον} \\ (N-1)^{ο}\end{matrix}, \begin{matrix}\text{φεύγει} \\ \text{μετά τον} \\ N^{ο}\end{matrix}\right]$

Άρα $Pr[M=n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} \frac{1}{N}, \; n \geq 1$

$E[M] = N$

(3) Μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας δικτύου $E[Y] = ?$

$\underbrace{P(0, \ldots, 0)}_{\text{πιθ. κενού δικτύου}} = \frac{E[\overset{I}{\overset{\shortparallel}{\text{περίοδος αφίξεως}}}]}{E[I] + E[Y]}$

$E[I] = \frac{1}{N\lambda}$ Σε όλο το δίκτυο οι εξωτερικές αφίξεις είναι Poisson$(N\lambda)$

$P(0, \ldots 0) = P_1(0) \ldots P_N(0) = \left(1 - \frac{N\lambda}{\mu}\right)^N$

Άρα $\left(1 - \frac{N\lambda}{\mu}\right)^N = \dfrac{\frac{1}{N\lambda}}{\frac{1}{N\lambda} + E[Y]}$

Φεβρουάριος 2019 - Θέμα 2

M|M|1 με ομαδικές αφίξεις, μεμονωμένες εξυπηρετήσεις

$\lambda = 2 \quad \mu = 8 \quad g_j = \begin{cases} 1/2, & j=1,2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

1) $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ + διάγραμμα + εξισώσεις ισορροπίας

Ειδικές περιπτώσεις της M/M/1 με ομαδικές αφίξεις

2) $P(z) = ?$

3) $(P_n) = ? \leftarrow$ Ανάλυση σε απλά κλάσματα + γεωμετρικές σειρές