Ουρές Αναμονής 19.12.2022

μάθημα 22

Ασκήσεις - Παλιά θέματα

(9.3)

$M/M/1$ με Poisson αφίξεις με ρυθμό λ,
$Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης
Άδειο σύστημα → παύση εξυπηρέτησης
Συσσώρευση k πελατών → επανέναρξη εξυπηρέτησης

$Q(t) = \#$ πελατών την στιγμή t
$I(t) =$ κατάσταση υπηρέτη την στιγμή t

1) Να δειχθεί ότι $\{Q(t), I(t)\}$ ΜΑΣΧ
2) Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης
3) Κατανομή ισορροπίας
4) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου ενεργοποιημένου υπηρέτη

Λύση

Καταστάσεις $\{Q(t), I(t)\}$

$(0,0)$ $\left\{\begin{array}{l}(n,0)\\(n,1)\end{array}\right.$ $1 \le n \le k$ $(n,1)$ $n \ge k$

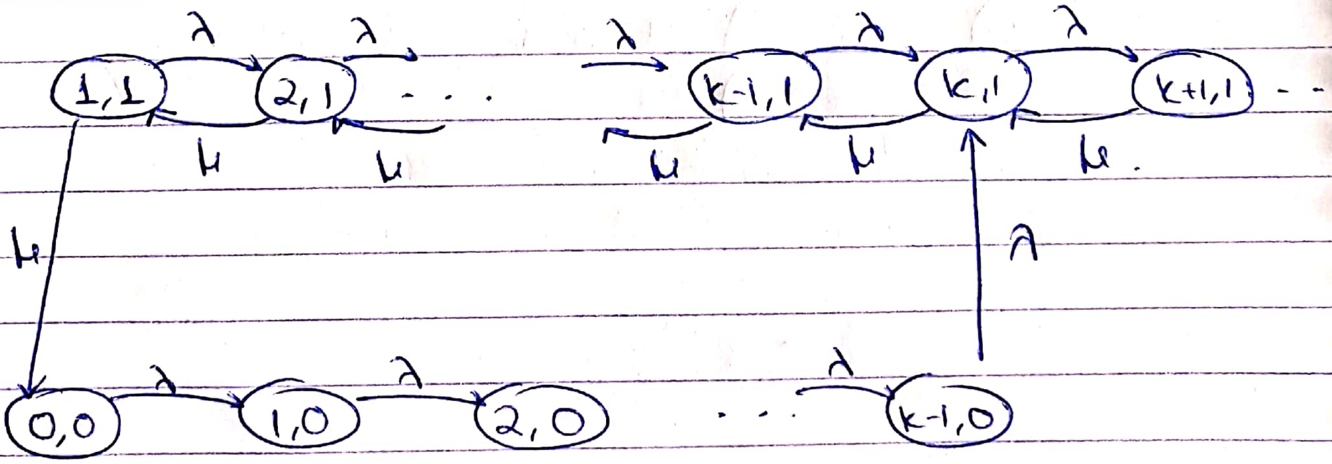
Scanned with CamScanner

(1)

Κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
$(0,0)$	$(1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(n,0)$, $1 \le n \le k-2$	$(n+1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(k-1,0)$	$(k,1)$	$Exp(\lambda)$
$(1,1)$	$\to (2,1)$	$Exp(\lambda)$
	$\to (0,0)$	$Exp(\mu)$
$(n,1)$, $n \geq 2$	$\to (n+1,1)$	$Exp(\lambda)$
	$\to (n-1,1)$	$Exp(\mu)$

Όλοι οι χρόνοι $Exp \to \{Q(t), I(t)\}$ ΜΑΣΧ.

(2)



③ Εξισώσεις ισορροπίας

$$\lambda P_{0,0} = \mu P_{1,1} \qquad (1)$$

$$\lambda P_{n,0} = \lambda P_{n-1,0} \quad , \ 1 \le n \le k-1 \qquad (2)$$

$$(\lambda+\mu) P_{1,1} = \mu P_{2,1} \qquad (3)$$

$$(\lambda+\mu) P_{n,1} = \lambda P_{n-1,1} + \mu P_{n+1,1} \quad , \ 2 \le n \le k-1 \ (4)$$

$$(\lambda+\mu) P_{k,1} = \lambda P_{k-1,1} + \mu P_{k+1,1} + \lambda P_{k-1,0} \qquad (5)$$

$$\mu P_{n,1} = \lambda P_{n-1,1} \quad , \ n \ge k+1 \qquad (6)$$

Έστω $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Από την (6) : $P_{n,1} = \rho^{n-k} P_{k,1}$, $n \ge k+1$

Από την (2) : $P_{n,0} = P_{0,0}$ $\quad 1 \le n \le k-1$

Θέτω $P(z) = \sum_{n=1}^{k} P_{n,1} z^n$

Πολλαπλασιάζω τις (3), (4), (5) με z^n και αθροίζω

$$(\lambda+\mu) P(z) = \mu \sum_{n=1}^{k} P_{n+1,1} z^n + \lambda P_{k-1,0} z^k + \lambda \sum_{n=2}^{k} P_{n-1,1} z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P(z) = \frac{\mu}{z} \sum_{j=2}^{k+1} P_{j,1} z^j + \lambda P_{0,0} z^k + \lambda z \sum_{j=1}^{k-1} P_j z^j$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P(z) = \frac{\mu}{z} \left(P(z) + \rho P_{k,1} z^{k+1} - P_{1,1} z \right) + \lambda z \left(P(z) - P_{k,1} z^k \right) + \lambda P_{0,0} z^k$$

Scanned with CamScanner

$\lambda P_{0,0} = \mu P_{1,1} \rightarrow P_{1,1} = \rho P_{0,0}$

(πολλαπλασιάζω με z)

$$[(\lambda+\mu)z - \mu - \lambda z^2] P(z) = \mu\rho P_{k,1} z^{k+1} - \rho\mu P_{0,0} z - \lambda z^{k+2} P_{k,1} + \lambda P_{0,0} z^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow P(z) = \frac{\mu\rho P_{k,1} z^{k+1} - \rho\mu P_{0,0} z - \lambda z^{k+2} P_{k,1} + \lambda z^{k+1} P_{0,0}}{\underbrace{(\lambda+\mu)z - \mu - \lambda z^2}_{\lambda(z-z^2)+\mu(z-1) = (z-1)(\mu-\lambda z)}}$$

Βρίσκω τις άγνωστες παραμέτρους $P_{0,0}$ και $P_{k,1}$ απαιτώντας ο αριθμητής της $P(z)$ να έχει ρίζα την $\frac{\mu}{\lambda}$.

$$\mu\rho P_{k,1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+1} - \mu\rho P_{0,0}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - \lambda P_{k,1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+2} + \lambda P_{0,0}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+1} = 0$$

και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση κανονικοποίησης

Αναπτύσσω την $P(z)$ σε απλά κλάσματα κλπ.

$$P(z) = \frac{\lambda\left[P_{k,1} z^{k+1}(1-z) - P_{0,0} z (1-z^k)\right]}{(\lambda z - \mu)(1-z)}$$

$$P(z) = \frac{\lambda P_{k,1} z^{k+1}}{\lambda z - \mu} - \frac{\lambda P_{0,0} z}{\lambda z - \mu} \cdot \frac{1-z^k}{1-z}$$

Scanned with CamScanner

(4) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου ενεργοποιημένου υπηρέτη =

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{n,1} = P(1) + \frac{\rho}{1-\rho} P_{k,1}$$

7.3

M|M|1 με ομαδικές αφίξεις

λ: ρυθμός άφιξης ομάδων

(g_j): συνάρτηση πιθανότητας μεγέθους ομάδων

κενό σύστημα: είσοδος ομάδας με πιθανότητα 1

μη κενό σύστημα: είσοδος ομάδας με πιθανότητα p

μ: ρυθμός εξυπηρέτησης

Q(t) = # πελατών την στιγμή t

1) {Q(t)} ΜΑΣΧ, εξισώσεις ισορροπίας, διάγραμμα ρυθμών
2) P(z), συνοπτική συνάρτηση...
3) Pr[αφικνούμενος πελάτης καταλαμβάνει την n-οστή θέση] συναρτήσει p_n, g_n
4) Κατανομή ισορροπίας, όταν οι αφίξεις είναι μεμονωμένες

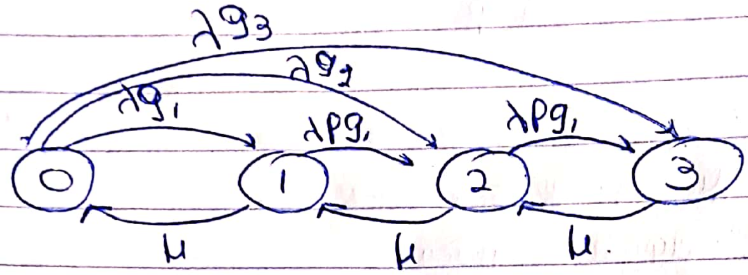
(1)

Κατάσταση	Επ. κατάσταση	χρόνος
0	$j \geq 1$	$Exp(\lambda g_j)$
$n, n \geq 1$	$n+j, j \geq 1$	$Exp(\lambda p g_j)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

Όλοι οι χρόνοι Exp ⇒ {Q(t)} ΜΑΣΧ

Scanned with CamScanner

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Εξισώσεις ισορροπίας

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda p+\mu)P_n = \lambda g_n P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda p g_{n-k} P_k + \mu P_{n+1}, \quad n \geq 1$$

(2) Έστω $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$.

Πολλαπλασιάζω την εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση n με z^n και αθροίζω

$$(\lambda p+\mu)P(z) + \lambda(1-p)P_0 - \mu P_0 = \frac{\mu}{z} \underbrace{\boxed{\sum_{n+1}^{\infty} P_{n+1} z^{n+1}}}_{= P(z) - P_0}$$

$$+ \lambda P_0 \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n}}_{G(z)} + \lambda p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} P_k z^n$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} P_k z^n = \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k}$$

Scanned with CamScanner

Άρα:

$$(\lambda p+\mu)P(z)+\lambda(1-p)P_0-\mu P_0=\frac{\mu}{z}P(z)-\frac{\mu}{z}P_0+$$
$$+\lambda P_0 G(z)+\lambda p\, G(z)P(z)-\lambda p P_0 G(z)$$

$$\left[(\lambda p+\mu)z-\mu-\lambda p z G(z)\right]P(z)=-\lambda z(1-p)P_0+\mu P_0 z-\mu P_0+$$
$$+\lambda P_0 z G(z)-\lambda p P_0 G(z)$$

Τελικά: $P(z)=\left(\dfrac{\mu(z-1)+\lambda(1-p)z(G(z)-1)}{(\lambda p+\mu)z-\mu-\lambda p z G(z)}\right)P_0$

Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή:
$\lambda p z(1-G(z))-\mu(1-z)$

Το P_0 από εξίσωση κανονικοποίησης:

$$P(1)=1 \Rightarrow \left(\frac{\mu+\lambda(1-p)G'(1)}{-\lambda p G'(1)+\mu}\right)P_0=1 \quad \left(m=G'(1) \text{ μέσο μέγεθος ομάδας}\right)$$

$$P_0\left(\frac{\mu+\lambda(1-p)m}{-\lambda p m+\mu}\right)=1$$

Ευστάθεια: $\lambda p m<\mu$, και τότε

$$P_0=\frac{\mu-\lambda p m}{\mu+\lambda(1-p)m}$$

Scanned with CamScanner

③ Pr [αφικνούμενος πελάτης καταλαμβάνει την n-οστή θέση]

Δεσμεύω στο πόσους βρίσκει η ομάδα

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pr[\text{η ομάδα βρίσκει } k]\, Pr\left[\begin{array}{l}\text{ο αφικνούμενος πελάτης}\\ \text{καταλαμβάνει θέση } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{ομάδα}\\ \text{βρίσκει } k\end{array}\right]$$

- $Pr[\text{ομάδα βρίσκει } k] = p_k$ λόγω PASTA
- $Pr\left[\begin{array}{l}\text{ο αφικνούμενος πελάτης}\\ \text{καταλαμβάνει θέση } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{η ομάδα}\\ \text{βρίσκει } k\end{array}\right]$

$$= \begin{cases} Pr\left[\begin{array}{l}\text{είναι ο n-οστός}\\ \text{στην ομάδα του}\end{array}\right] \to \tilde{g}_n, & k=0 \\ \rho\, Pr\left[\begin{array}{l}\text{είναι ο (n-k)-οστός}\\ \text{στην ομάδα του}\end{array}\right] \to \tilde{g}_{n-k}, & 1 \le k \le n-1 \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

$$\tilde{g}_n = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} g_j}{m} \leftarrow \text{μέσο μέγεθος ομάδας}$$

④ Για μεμονωμένες αφίξεις

$$G(z) = z \quad , \quad G'(1) = 1$$

$$P(z) = \frac{\mu(z-1) - \lambda(1-\rho)z(G(z)-1)}{(\lambda\rho+\mu)z - \mu - \lambda\rho z^2} \quad \frac{\mu-\lambda\rho}{\mu+\lambda(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu + \lambda(1-\rho)z}{\mu - \lambda\rho z} \cdot \frac{\mu-\lambda\rho}{\mu+\lambda(1-\rho)}$$

Scanned with CamScanner

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ $\quad P(z) = \dfrac{1+\rho(1-\rho)z}{1-\rho p z} \; \dfrac{1-\rho p}{1+\rho(1-\rho)}$

Αναπτύσσω σε δυνάμεις του z^n με γεωμετρική σειρά

Scanned with CamScanner