# Ουρές Αναμονής 07.12.2022

μάθημα 19

## Αντιστρεψιμότητα - Εφαρμογές στην Θεωρία Ουρών

### 1 Σύνοψη

- $\{X(t)\} \longrightarrow \{\hat{X}(t)\}$, $\hat{X}(t) = X(-t)$ λέγεται αντίστροφη της $\{X(t)\}$
- $\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$ $\{X(t)\}, \{\hat{X}(t)\}$ στοχαστικά ισοδύναμες
- Αν $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ στάσιμη, αδιαχώριστη με κατανομή ισορροπίας $(p_j)$, τότε και η $\{\hat{X}(t)\}$ είναι ΜΑΣΧ, αδιαχώριστη, στάσιμη με κατανομή ισορροπίας $(p_j)$ και ρυθμούς $\hat{q}_{ij} = \dfrac{p_j q_{ji}}{p_i}$

• $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με ρυθμούς $q_{ij}$ και κατανομή ισορροπίας $(P_j)$, αδιαχώριστη, σταθερή.

$\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$ το γινόμενο των ρυθμών μετάβασης σε κάθε κύκλο καταστάσεων είναι ίδιο ως προς τις 2 φορές

$$\Updownarrow$$

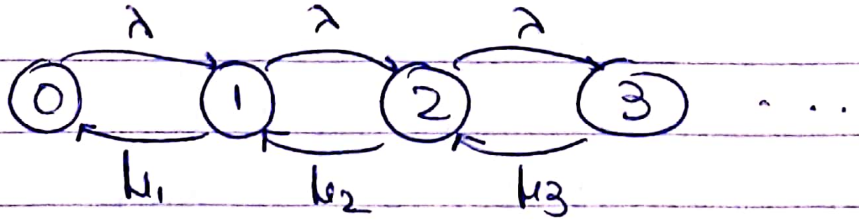
$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji}, \quad i \neq j$$

## 9 Θεώρημα Burke

Σε μια απλή μαρκοβιανή ουρά με $A(t)$ = Poisson διαδικασία αφίξεων, $Q(t)$ = # πελατών στο σύστημα, $D(t)$ διαδικασία αναχωρήσεων, έχουμε

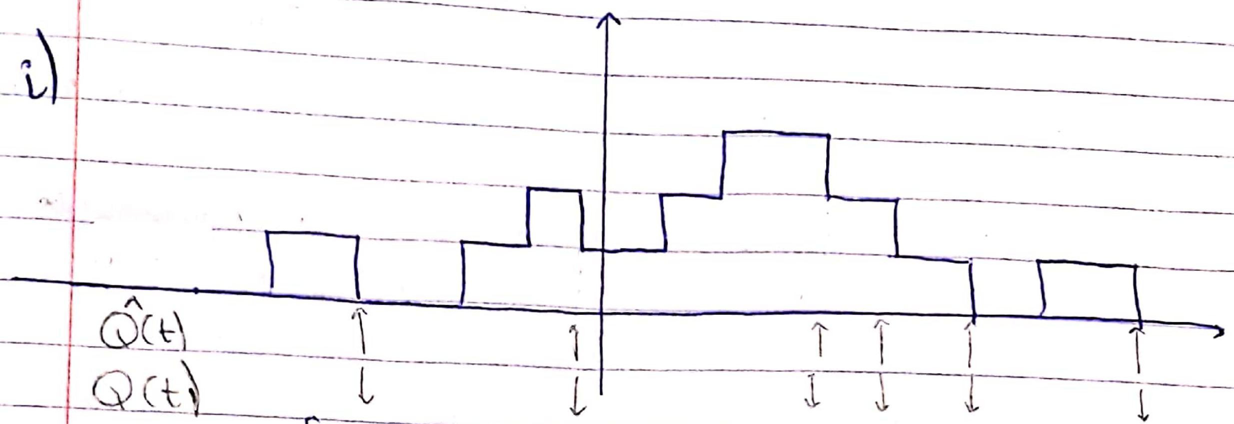
i) $\{D(t)\}$ Poisson με τον ίδιο ρυθμό με την $\{A(t)\}$

ii) Για κάθε $t_0$, η $Q(t_0)$ και η $\{D(t): t \leq t_0\}$ είναι ανεξάρτητες



## Απόδειξη

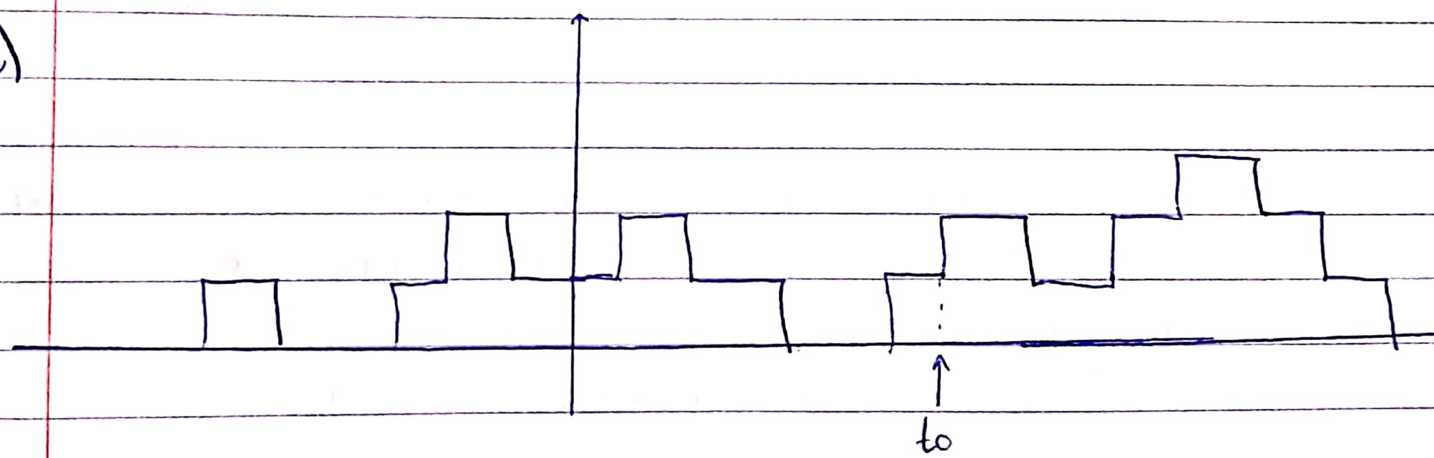
i)




Αφού η $\{Q(t)\}$ είναι αλυσίδα γέννησης-θανάτου, είναι αντιστρέψιμη ΜΑΣΧ. Άρα οι διαδικασίες αφίξεων στην $\{Q(t)\}$ και $\{\hat{Q}(t)\}$ είναι ισοδύναμες.

Η διαδικασία αφίξεων στην $\{\hat{Q}(t)\}$ είναι Poisson, όμως συμπίπτει με την διαδικασία αναχωρήσεων της $\{Q(t)\}$. Άρα έχουμε το (i).

ii)




$\hat{Q}(-t_0)$ είναι ανεξάρτητη από την διαδικασία των αφίξεων της στο $[-t_0, +\infty)$ (επειδή η $\{\hat{Q}(t)\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμη με την $\{Q(t)\}$).

Μεταφράζοντας για την $\{Q(t)\}$: $Q(t_0) = \hat{Q}(-t_0)$ και η διαδικασία των αναχωρήσεων της αρχικής μέχρι το $t_0$ είναι η διαδικασία αφίξεων της αντιστροφής από το $-t_0$

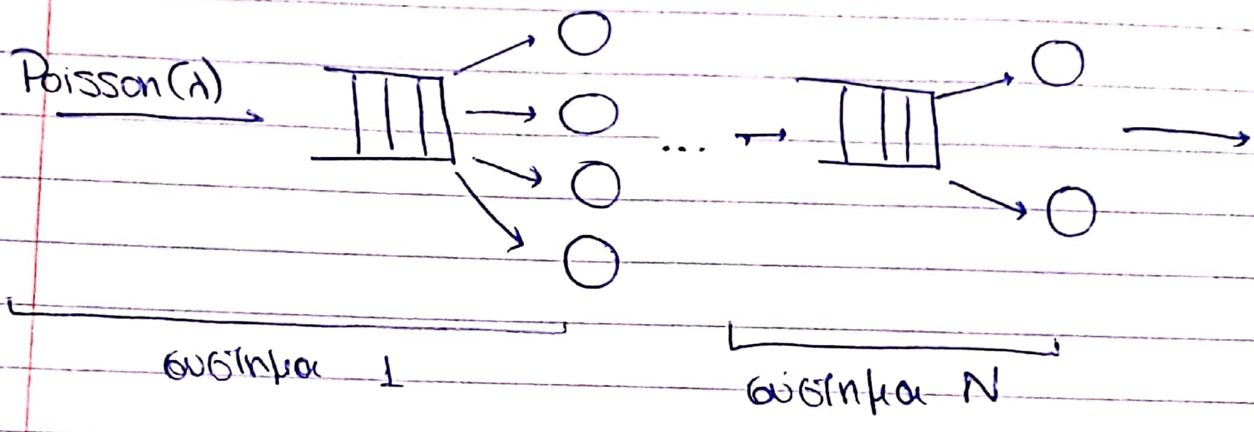
$$\{D(t) : t \leq t_0\} = \{\hat{A}(t) : t \geq -t_0\}$$

Άρα έχουμε το (ii)

Scanned with CamScanner

## ③ Κατανομή ισορροπίας απλών μαρκοβιανών ουρών σε σειρά.

Έστω $N$ συστήματα σε σειρά. Οι αναχωρήσεις στο σύστημα $i$ γίνονται αφίξεις στο $i+1$, $i=1,\dots N-1$. Οι αναχωρήσεις από το σύστημα $N$ φεύγουν από το δίκτυο. Οι αφίξεις στο σύστημα 1 είναι Poisson με ρυθμό $\lambda$.




Κάθε σύστημα μεμονωμένο με Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό $\lambda$ είναι απλή μαρκοβιανή ουρά με κατανομή ισορροπίας

$$\Pr[Q_i = n_i] = P_i(n_i), \quad n_i \geq 0$$

Τότε

① Για κάθε $t_0$, οι $Q_1(t_0), \dots Q_N(t_0)$ ανεξάρτητες

② Η κατανομή ισορροπίας του σειριακού δικτύου είναι

$$P(\underline{n}) = p(n_1, \dots n_N) = P_1(n_1) \cdot P_2(n_2) \dots P_N(n_N)$$

$\underline{n} \in \mathbb{N}_0^N$ (διανύσματα φυσικών)

Scanned with CamScanner

Απόδειξη

1) Έστω $t_0$. Από το θεώρημα Burke, $Q_1(t_0)$ και $\{D_1(t) : t \leq t_0\}$ ανεξάρτητες, με $\{D_1(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$.
Άρα $Q_1(t)$ ανεξάρτητη από την διαδικασία αφίξεων $\{A_2(t) : t \leq t_0\}$ ← διαδικασία αφίξεων στο σύστημα 2
Όμως $Q_2(t_0)$ εξαρτάται από $\{A_2(t) : t \leq t_0\}$ και τους χρόνους εξυπηρέτησης στο σύστημα 2.
Άρα $Q_1(t_0)$, $Q_2(t_0)$ ανεξάρτητες. ο.ε.δ

2) $$P(\underline{n}) = \lim_{t \to +\infty} \Pr[Q_1(t) = n_1, \ldots Q_N(t) = n_N]$$

Όμως $\forall$ χρονική στιγμή $t$, $Q_1(t), \ldots Q_N(t)$ ανεξάρτητες. Άρα

$$P(\underline{n}) = \lim_{t \to +\infty} \Pr[Q_1(t) = n_1] \lim_{t \to +\infty} \Pr[Q_2(t) = n_2] \ldots \lim_{t \to +\infty} \Pr[Q_N(t) = n$$

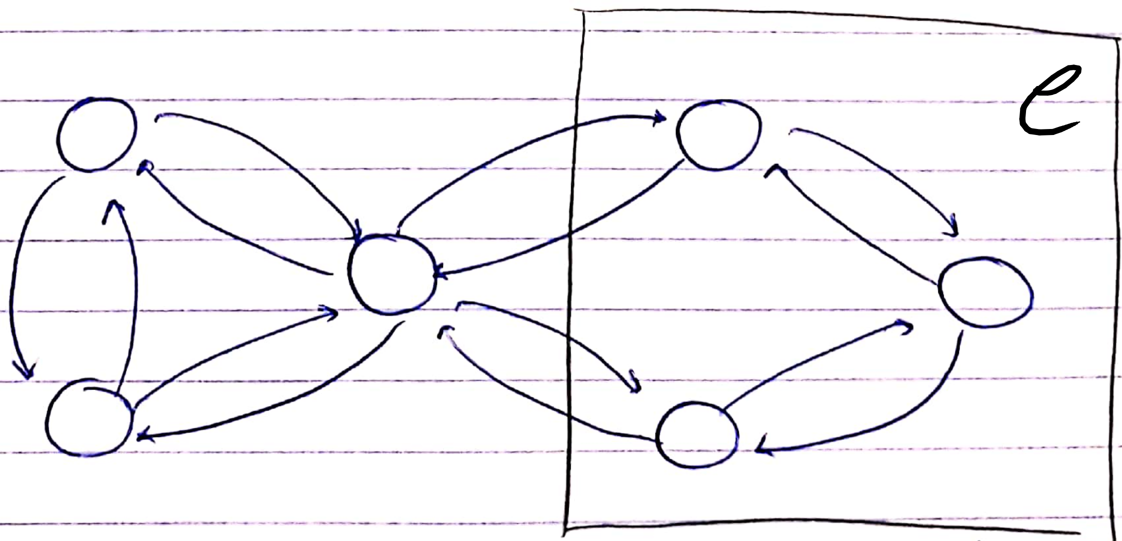
## ④ Παράθεση αντιστρέψιμων διαδικασιών - Περικοπή αντιστρέψιμης ΜΑΣΧ

**Πρόταση 1:** Αν $\{X_1(t)\}, \{X_2(t)\}$ ανεξάρτητες αντιστρέψιμες στοχαστικές διαδικασίες, τότε η παράθεσή τους $\{(X_1(t), X_2(t))\}$ είναι αντιστρέψιμη.

Η απόδειξη είναι άμεση επαληθεύοντας τον ορισμό.

**Πρόταση 2:** Αν $\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη, αδιαχώριστη, στάσιμη ΜΑΣΧ με χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$ και $C \subseteq \mathcal{X}$. Τότε, η περικοπή της $\{X(t)\}$ στο $C$ είναι αντιστρέψιμη (συμβολίζουμε $\{X_C(t)\}$).
Αν $(P_j)$ η κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$ και $(P_{Cj})$ η κατανομή ισορροπίας της $\{X_C(t)\}$ ισχύει ότι

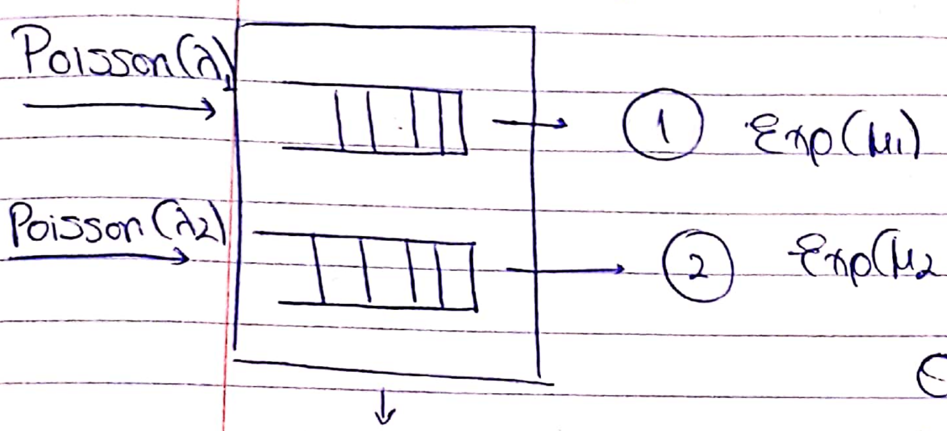
$$P_{C_j} = \frac{P_j}{\sum_{i \in C} P_i}$$




Άμεση επαλήθευση των εξισώσεων λεπτομερούς ισορροπίας.

## (5) Παράδειγμα

2 παράλληλες M/M/1 ουρές με κοινό πεπερασμένο χώρο αναμονής για k πελάτες.




Οι αφίξεις και οι εξυπηρετήσεις στις 2 ουρές ανεξάρτητες.

κοινός χώρος αναμονής με k θέσεις

Θέλουμε να βρούμε την κατανομή ισορροπίας του συστήματος

Αν δεν είχαμε κοινό χώρο αναμονής, θα είχαμε 2 ανεξάρτητες M/M/1 ουρές (αντιστρέψιμες).
Οπότε $\{(Q_1(t), Q_2(t))\}$
με $Q_i(t)$ = # πελατών στο σύστημα $i$ την στιγμή $t$
θα ήταν αντιστρέψιμη με στάσιμη κατανομή.

$$P(n_1,n_2) = P_1(n_1)P_2(n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}$$

$n_1, n_2 \geq 0$

Η διαδικασία του πλήθους των πελατών στο σύστημα με τον κοινό χώρο αναμονής είναι η περικοπή της $\{(Q_1(t), Q_2(t))\}$ στο σύνολο

$$C = \{(n_1,n_2) : \max(0,n_1-1) + \max(0,n_2-1) \leq k\}$$

Επομένως, η κατανομή ισορροπίας είναι

$$P_c(n_1,n_2) = \frac{P(n_1,n_2)}{\sum_{(m_1,m_2)\in C} P(m_1,m_2)}$$

## 6 Η M|M|1 με ανενεργές περιόδους αφίξεων/εξυπηρετήσεων

Το σύστημα έχει 2 καταστάσεις
ON (1) → δέχεται αφίξεις, εξυπηρετεί
OFF (0) → ούτε δέχεται αφίξεις ούτε εξυπηρετεί

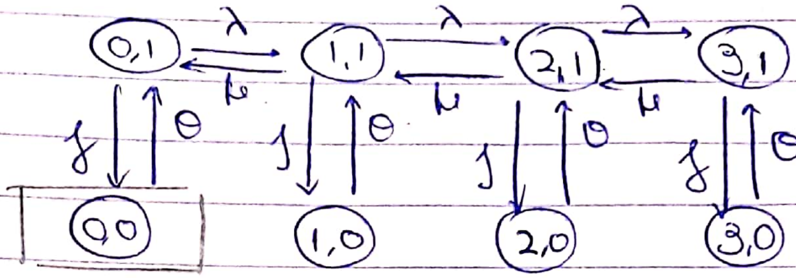
Η εναλλαγή των καταστάσεων 0,1 είναι:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\theta"] & 1 \arrow[l, bend left, "\zeta"] \end{tikzcd}$$

Όταν είναι ON, συμπεριφέρεται ως M|M|1 με ρυθμούς αφίξεων λ, ρυθμούς εξυπηρετήσεων μ.

Για μια μαρκοβιανή περιγραφή του συστήματος,
Χρειάζεται $\forall$ t:
Q(t): # πελατών την στιγμή t
I(t) = κατάσταση συστήματος την στιγμή t

Για την $\{(Q(t), I(t))\}$ έχουμε το διάγραμμα:




Το διάγραμμα ρυθμών είναι αμφίδρομο δέντρο
Άρα $\{(Q(t), I(t))\}$ αντιστρέψιμη.

$$P(n,1) = \frac{\theta \lambda^n}{\gamma \mu^n} P(0,0) \quad , n \geq 0$$

$$P(n,0) = \frac{\theta \lambda^n \gamma}{\gamma \mu^n \theta} P(0,0) \quad n \geq 0$$

$\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$$P(n,1) = \frac{\theta \rho^n}{\gamma} P(0,0) \quad n \geq 0$$

$$P(n,0) = \rho^n P(0,0) \quad n \geq 0$$

Από εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,0) + P(n,1) = 1 \rightarrow$$

$$P(0,0)\left(1+\frac{\theta}{\gamma}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} = 1$$

Ευστάθεια $\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} < +\infty$

Τότε $P(0,0) = \frac{(1-\rho)\gamma}{\theta+\gamma}$

Τελικά

$$P(n,0) = \frac{\rho^{n}(1-\rho)\gamma}{\theta+\gamma}, \quad n \geq 0$$

$$P(n,1) = \frac{\theta}{\theta+\gamma}(1-\rho)\rho^{n}, \quad n \geq 0$$

Ασκήσεις 1,2,3,4 (κεφάλαιο 10)