Ουρές Αναμονής 28.11.2022

Μάθημα 16

Διδιάστατες Μαρκοβιανές Ουρές

Μέθοδος φάσεων

① Μοντέλα Ουρών - Στοχαστικές Διαδικασίες

$Q(t)$ = # πελατών την στιγμή t

Απλή Μαρκοβιανή ουρά $\longleftrightarrow \{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης-θανάτου

Μαρκοβιανές ουρές $\longleftrightarrow \{Q(t)\}$ Μ.Α.Σ.Χ.

Διδιάστατη μαρκοβιανή ουρά $\longleftrightarrow \{(Q(t), I(t))\}$ ΜΑΣΧ

όπου $I(t)$ "επιπλέον πληροφορία"

πχ. για κατάσταση του υπηρέτη, για το είδος του πελάτη, για χρόνο $\underbrace{\text{εξυπηρέτησης, για ενδιάμεσο}}_{\text{μέθοδος των φάσεων}}$ χρόνο αφίξεων

② Erlang χρόνοι εξυπηρέτησης ή ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

Έστω ότι ένας χρόνος (εξυπηρέτησης - ενδιάμεσων αφίξεων).

$X \sim$ Erlang με μέση τιμή $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{k}{k\mu}$.

πχ. $\text{Erlang}(k, k\mu)$

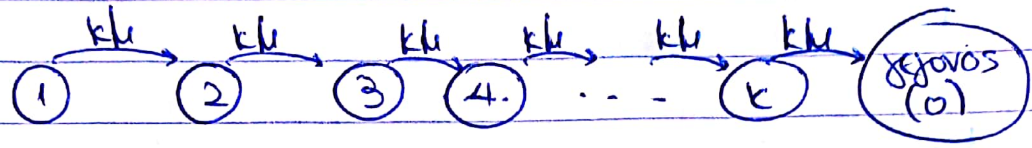
γιατί $E[X] = \dfrac{k}{k\mu} = \dfrac{1}{\mu}$ $\quad Var[X] = \dfrac{k}{(k\mu)^2} = \dfrac{1}{k\mu^2}$

Υπενθύμιση: Αν $X \sim \text{Erlang}(n, a)$ $\quad f_X(t) = \dfrac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}, \; t > 0$

$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $Y_i \sim \exp(a)$ ανεξ.

$E[X] = \dfrac{n}{a} \quad V[X] = \dfrac{n}{a^2}$

Ιδέα: Να περιγράψουμε έναν χρόνο Erlang(k,kμ) ως τον χρόνο που χρειάζεται να περάσει ένας πελάτης σε k Exp(kμ) φάσεις, μέχρι να εξυπηρετηθεί ή να αφιχθεί.



Αυτή η ιδέα δίνει την μέθοδο των φάσεων του Erlang

③ Παράδειγμα $M|E_s|1$ ουρά

Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ

Erlang(s,sμ) χρόνοι εξυπηρέτησης

(ρυθμός εξυπηρέτησης)

1 υπηρέτης, χωρητικότητα $k=100$

$\{Q(t)\}$	κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
	0	1	Exp(λ)
	$n \geq 1$	$n+1$	Exp(λ)
		$n-1$	Υπολειπόμενος χρόνος Erlang(s,sμ) όχι Exp

Άρα $\{Q(t)\}$ όχι ΜΑΣΧ

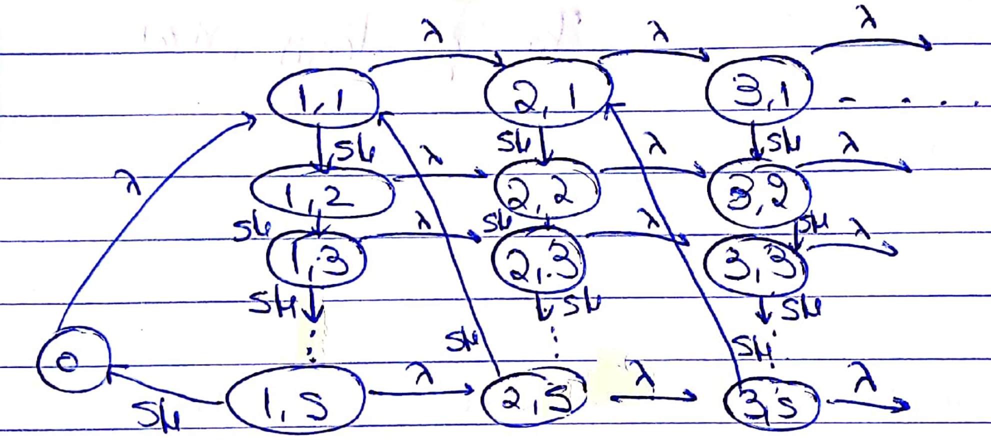
Θέτω $S(t)$ = φάση που βρίσκεται ο εξυπηρετούμενος πελάτης
service

$S(t) \in \{1, 2, \dots s\}$

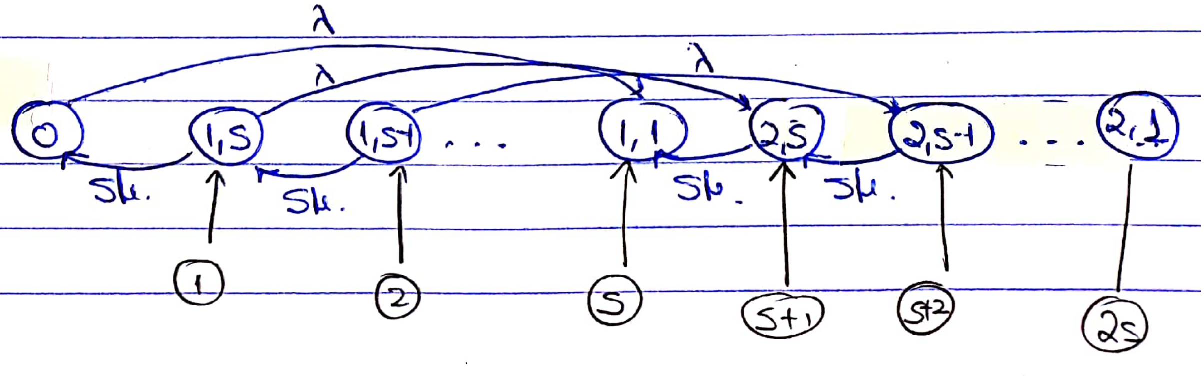
Τότε, για την $\{(Q(t), S(t))\}$ έχω:

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	$(1,1)$	$Exp(\lambda)$
(n,i), $n \geq 1$, $1 \leq i \leq s-1$	$(n+1,i)$	$Exp(\lambda)$
	$(n,i+1)$	$Exp(s\mu)$
(n,s), $n \geq 1$	$(n+1,s)$	$Exp(\lambda)$
	$(n-1,1)$	$Exp(s\mu)$

Όλοι οι χρόνοι Exp, άρα $\{(Q(t), S(t))\}$ ΜΑΣΧ.



Αν μας ενδιαφέρει η κατανομή ισορροπίας, μπορούμε να ονομάσουμε την κατάσταση (n,i) ως
και να έχουμε το



που είναι σαν το διάγραμμα της $M/M/1$ με ομαδικές αφίξεις με ρυθμό αφίξεων λ, ομάδες μεγέθους s και $Exp(s\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης.

Είναι σαν κάθε πελάτης της $M \mid E_s \mid 1$ να είναι ομάδα s πελατών μιας $M \mid M \mid 1$ με ομάδες μεγέθους s.

$$\underset{\lambda}{M} \mid \underset{\mu}{E_s} \mid 1$$

$$\underset{\lambda}{M} \mid \underset{s\mu}{M} \mid 1$$

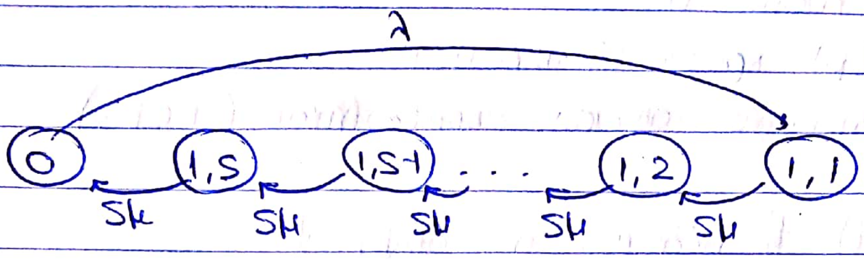
Αν μας ενδιαφέρει η οριακή πιθανότητα $P_n = \lim_{t \to +\infty} \Pr[Q(t) = n]$, $n \geq 0$,

τότε βρίσκουμε την κατανομή ισορροπίας $P_{(n,i)}$ της $\{(Q(t), S(t))\}$ και

$$P_n = \sum_{i=1}^{s} P_{(n,i)}, \quad n \geq 1$$

(4) Παράδειγμα $M/E_s/1/1$ ουρά

Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ
Erlang$(s, s\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, $k=1$



Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = s\mu P_{1,s}$$
$$\lambda P_0 = s\mu P_{1,1}$$
$$s\mu P_{1,i} = s\mu P_{1,i-1}, \quad 2 \le i \le s$$

Τελικά, $P_{1,i} = \dfrac{\lambda P_0}{s\mu}$, $i=1,2,\dots s$

Επομένως (από εξίσωση κανονικοποίησης)

$$P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_{1,i} = 1$$

$$P_0\left(1 + \frac{s\lambda}{s\mu}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_{1,i} = \frac{\lambda}{s(\lambda+\mu)}, \quad i=1,2,\dots s$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{s} P_{1,i} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

5) Παράδειγμα Er | M | 1 ουρά

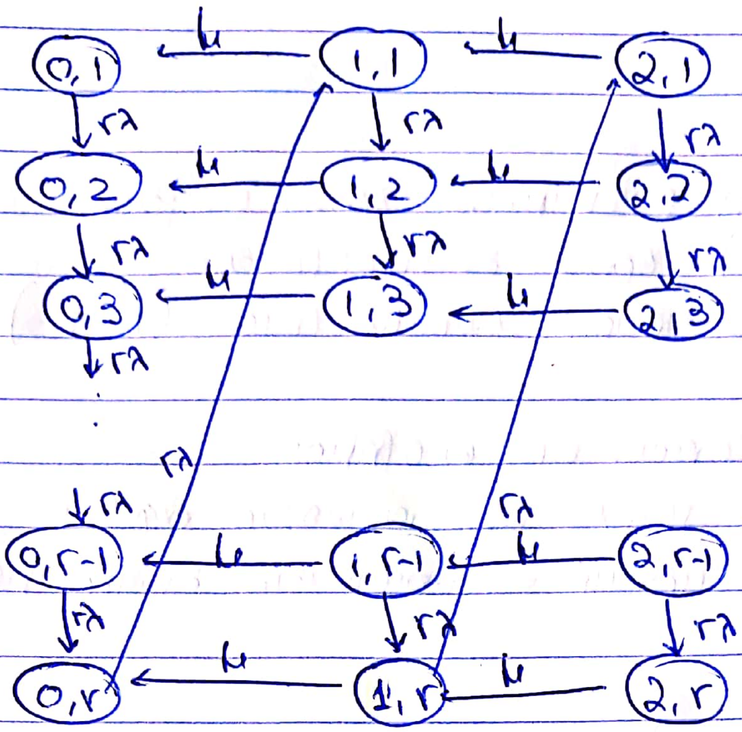
Ανεξάρτητοι, ισόνομοι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων Erlang(r, rλ)
(με ρυθμό λ)
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα (FCFS)

Q(t) = # πελατών την στιγμή t
A(t) = φάση πελάτη σε διαδικασία άφιξης
arrival

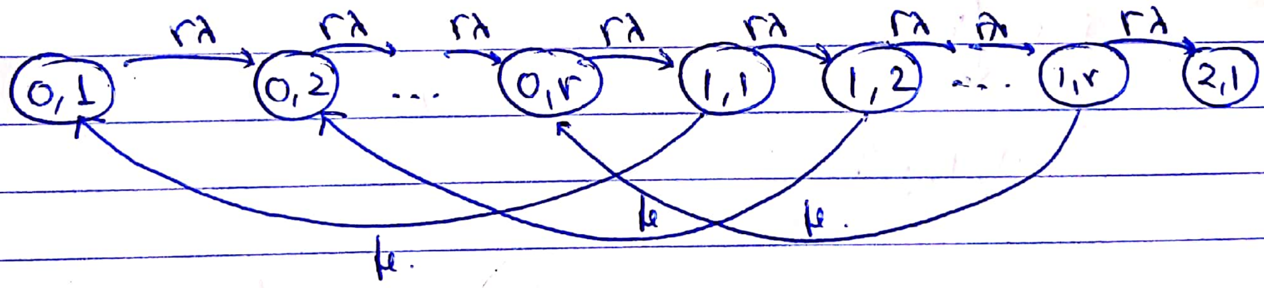
(n, i) n: # πελατών στο σύστημα
i: φάση πελάτη σε διαδικασία άφιξης

Κατάσταση	Επόμ. κατάσταση	Χρόνος
$(0,i)$, $1 \le i \le r-1$	$(0, i+1)$	Exp(rλ)
$(0,r)$	$(1,1)$	Exp(rλ)
(n,i) $n \ge 1$, $1 \le i \le r-1$ →	$(n, i+1)$	Exp(rλ)
→	$(n-1, i)$	Exp(μ)
(n,r) $n \ge 1$ →	$(n+1, 1)$	Exp(rλ)
→	$(n-1, r)$	Exp(μ)

Όλοι οι χρόνοι Exp → $\{(Q(t), A(t))\}$ ΜΑΣΧ.



ή



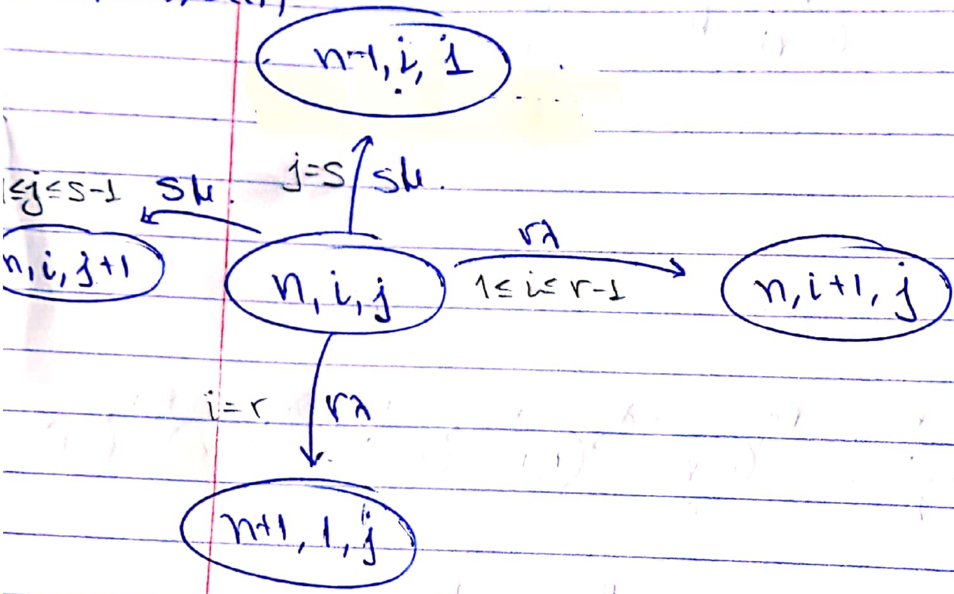
Η $\underset{\lambda}{E_r} \,|\, \underset{\mu}{M} \,|\, 1$ μπορεί να μελετηθεί μέσω M|M|1 με ομαδικές εξυπηρετήσεις ρυθμού αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, μέγεθος εξυπηρετούμενης ομάδας r

⑥ Παράδειγμα $E_r|E_s|1$ ουρά

Erlang$(r, r\lambda)$ ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων
Erlang$(s, s\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησεων
1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα (FCFS)

$Q(t)$ = # πελατών στο σύστημα
$A(t)$ = φάση πελάτη σε διαδικασία άφιξης
$S(t)$ = φάση πελάτη σε διαδικασία εξυπηρέτησης

$(Q(t), A(t), S(t))$



(7) Παράδειγμα $E_2|E_2|1|1$ ουρά

Erlang(2,2λ) ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων
Erlang(2,2μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, χωρητικότητα 1

$Q(t)$ = # πελατών στιγμή t
$A(t)$ = φάση αφικνούμενου
$S(t)$ = φάση εξυπηρετούμενου

$(Q(t), A(t), S(t))$