Ουρές Αναμονής 21.11.2022
Μάθημα 14

Δισδιάστατες Μαρκοβιανές Ουρές
Μέθοδος Πιθανογεννητριών

① Το μαρκοβιανό σύστημα εκκαθαρίσεων με ολικές εξυπηρετήσεις και ομαδικές αφίξεις

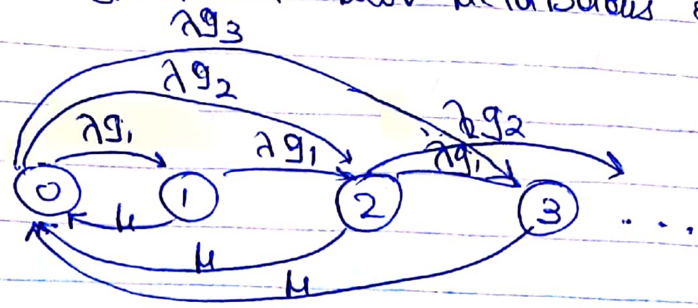
Poisson: διαδικασία αφίξεων για ομάδες πελατών με ρυθμό λ
Μέγεθος ομάδων α.ι.τ.μ. $\sim (g_k, k \geq 1)$
$Pr[\text{μέγεθος ομάδας} = k] = g_k, \quad k = 1, 2, \dots$
$Exp(\mu)$ χρόνοι μεταξύ διαδοχικών εκκαθαρίσεων, που εξυπηρετούν όλους τους πελάτες

② Μοντελοποίηση ως Μ.Α.Σ.Χ.
$Q(t) = \#$ πελατών την στιγμή t

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
0	$k, k \geq 1$	$Exp(\lambda g_k)$
$\vdots$		
$n \geq 1$	$n+k, k \geq 1$	$Exp(\lambda g_k)$
	0	$Exp(\mu)$

Άρα $\{Q(t)\}$ Μ.Α.Σ.Χ.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



③ Εξισώσεις Ισορροπίας

$$\lambda P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k = \mu \sum_{k=1}^{\infty} P_k \qquad ①$$

$$(\lambda+\mu)P_n = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} P_k g_{n-k} \qquad , n \geq 1 \qquad ②$$

④ Λύση με πιθανογεννήτριες

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k \;, |z| \leq 1 \text{ (γνωστή)}$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \;, |z| \leq 1 \text{ (πρέπει να προσδιοριστεί).}$$

Πολλαπλασιάζω την ① με z^0, την ② με z^n, αθροίζω

$$\lambda P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda+\mu) P_n z^n = \mu \sum_{k=1}^{\infty} P_k + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_k g_{n-k} z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \mu(1-P_0) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k}$$

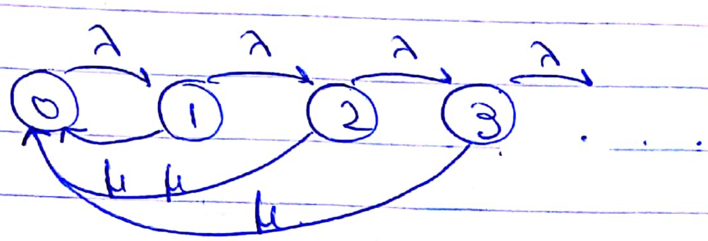
$j=n-k$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \mu(1-P_0) + \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k}_{P(z)} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} g_j z^j}_{G(z)}$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \mu(1-P_0) + \lambda G(z)P(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu}{\mu+\lambda(1-G(z))}.$$

5 Ειδική περίπτωση 1: μεμονωμένες αφίξεις



Εδώ $G(z) = z$.

Άρα $P(z) = \frac{\mu}{\mu+\lambda(1-z)} = \frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z}$

$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda z}{\mu+\lambda}} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n z^n$$

Οπότε $P_n = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n, \ n \geq 0$

$$P_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n, \ n \geq 0$$

$$P_n \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)$$

Άρα

$$E[Q] = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

⑥ Ειδική περίπτωση 2: Γεωμετρικό μέγεθος αφικνούμενων ομάδων

$$g_j = (1-\alpha)\alpha^{j-1}, \quad j \geq 1$$

Τότε $G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j = \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^{j-1} z^j = \frac{z(1-\alpha)}{1-\alpha z}$

$$P(z) = \frac{\mu}{\mu+\lambda(1-G(z))} = \frac{\mu}{\mu+\lambda\left(1-\frac{z(1-\alpha)}{1-\alpha z}\right)}$$

$$= \frac{\mu(1-\alpha z)}{\mu(1-\alpha z)+\lambda(1-\alpha z-(1-\alpha)z)} = \frac{\mu-\mu\alpha z}{\mu+\lambda-(\mu\alpha+\lambda)z}$$

$$= \frac{\mu-\mu\alpha z}{\mu+\lambda} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\mu\alpha+\lambda}{\mu+\lambda}\right)z} = \frac{\mu-\mu\alpha z}{\mu+\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\alpha+\lambda}{\mu+\lambda}\right)^k z^k$$

$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\alpha+\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n z^n - \frac{\mu\alpha}{\mu+\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu\alpha+\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-1} z^n$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\mu}{\mu+\lambda}, & n=0 \\ \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\frac{\mu\alpha+\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n - \frac{\mu\alpha}{\mu+\lambda}\left(\frac{\mu\alpha+\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-1}, & n\geq 1 \end{cases}$$

Τελικά:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\mu+\lambda}, & n=0 \\ \dfrac{\lambda\mu(1-a)}{(\mu+\lambda)^2}\left(\dfrac{\mu a+\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-1}, & n\geq 1 \end{cases}$$

7 Η M/M/∞ ουρά με ομαδικές αφίξεις

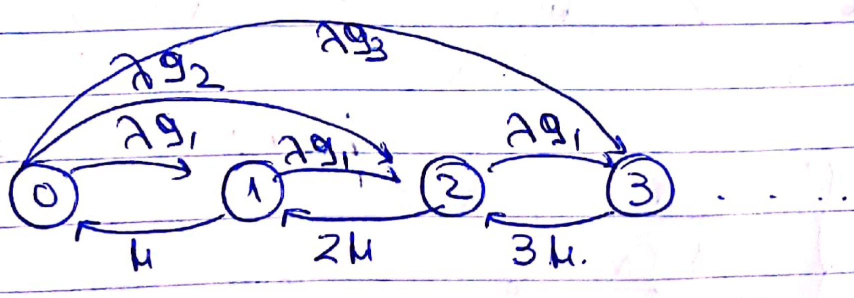
Poisson διαδικασία αφίξεων ομάδων με ρυθμό λ
Ανεξάρτητα και ισόνομα μεγέθη ομάδων με σπ $(g_k, k\geq 1)$.
∞ υπηρέτες

8 Μοντελοποίηση ως ΜΑΣΧ

$Q(t)$ = # πελατών την στιγμή t

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
0	$k, k\geq 1$	$Exp(\lambda g_k)$
$n\geq 1$	$n+k, k\geq 1$	$Exp(\lambda g_k)$
	$n-1$	$Exp(n\mu)$

Άρα $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ



9 Εξισώσεις Ισορροπίας

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \qquad (1)$$

$$(\lambda + n\mu) P_n = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} P_k g_{n-k} + \mu(n+1) P_{n+1}, \quad n \geq 1 \qquad (2)$$

10 Μέθοδος πιθανογεννητριών

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k g_k, \quad |z| \leq 1$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n, \quad |z| \leq 1$$

Πολλαπλασιάζω την (1) με z^0 και την (2) με z^n και αθροίζω

$$\lambda P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + n\mu) P_n z^n = \mu P_1 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_k g_{n-k} z^n$$

$$+ \mu \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) P_{n+1} z^n$$

$$\Rightarrow \lambda P(z) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^n = \lambda G(z) P(z)$$

$$+ \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1} z^n$$

- $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$

  $P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^{n-1}$

  Άρα $\mu \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^n = \mu z P'(z)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1} z^n \overset{k=n+1}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} k P_k z^{k-1} = P'(z)$

Αρα $\lambda P(z) + \mu z P'(z) = \lambda P(z) G(z) + \mu P'(z)$

$$\Leftrightarrow \lambda\big(1-G(z)\big)P(z) = \mu(1-z)P'(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1-G(z)}{1-z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dz}\log(P(z)) = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{1-G(z)}{1-z} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\log P(1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \log P(z) = \frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u}\,du$$

Τελικά $P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 \left(\frac{1-G(u)}{1-u}\right)du}$.

(11) Ειδική περίπτωση: Μεμονωμένες αφίξεις

$$G(z)=z \qquad P(z)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 du}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)}$$

Η $P(z)$ είναι η πιθανογεννήτρια της Poisson $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

Άρα $P_n=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}$, $n\geq 0$

(12) Μέση τιμή

$$E[Q]=P'(1)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1\frac{1-G(u)}{1-u}du}\Bigg|_{z=1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1-G(u)}{1-u}\right)\right)\Bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}G'(1)=\frac{\lambda m}{\mu}$$

m: μέσο μέγεθος αφικνούμενων ομάδων.

Η με Little.

$E[Q]=\lambda m E[S]$, $E[S]=\dfrac{1}{\mu}$ λm: ρυθμός αφίξεων.

έχουμε άπειρους server άρα ο μέσος χρόνος παραμονής είναι ίσος με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης

Ασκήσεις 7.1 έως 7.5

(13) Μια χρήσιμη πιθανογεννήτρια

Έστω $(g_j, j \geq 1)$ συνάρτηση πιθανότητας.

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \quad , |z| \leq 1$$

g_j = πιθανότητα μέγεθος ομάδας $= j$

$\tilde{g}_j$ = πιθανότητα ένας πελάτης να είναι ο κ-οστός της ομάδας του

$$\tilde{g}_j = \frac{\sum_{k=j}^{\infty} g_k}{m} \quad , \quad m = \sum_{j=1}^{\infty} j g_j$$

$$\tilde{G}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{g}_j z^j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} g_k z^j =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sum_{j=1}^{k} z^j = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1} g_k \, z \, \frac{(1-z^k)}{1-z} \right)$$

$$= \frac{z}{m} \left(\frac{1 - G(z)}{1-z} \right)$$